

Бібліотека «Шкільного світу»
Заснована у 2003 р.



С. Скворцова

**СЮЖЕТНІ
ЗАДАЧІ
НА ПРОЦЕСИ.
3–4-ТІ КЛАСИ**

Початкова освіта. Бібліотека

Київ
«Редакції газет з дошкільної та початкової освіти»
2013

ЗМІСТ

Задачі на процеси в курсі початкової математики	4
Методика формування вміння розв'язувати типові задачі на процеси	4
1. Методика навчання розв'язування задач на спільну роботу	12
1.1. Задачі на спільну роботу в 3-му класі	12
1.2. Задачі на спільну роботу в 4-му класі	22
2. Методика навчання розв'язування задач на рух	41
2.1. Задачі на одночасний рух у різних напрямках	42
2.2. Методика навчання молодших школярів розв'язування задач на неодноразовий рух	80
2.3. Складання задач на одночасний рух назустріч або в протилежних напрямках за таблицею або виразом	85
2.4. Зіставлення задач на спільну роботу, у яких продуктивність спільної праці являє собою суму продуктивностей виконавців, із задачами на одночасний рух у різних напрямках	87
2.5. Методика навчання розв'язування задач на рух в одному напрямку	105
2.6. Зіставлення задач на спільну роботу, у яких продуктивність спільної праці знаходять дією віднімання, із задачами на рух в одному напрямку. Узагальнення математичних структур та способів розв'язання.....	133
2.7. Задачі на рух за течією та проти течії річки.....	138

Задачі на процеси в курсі початкової математики

Задачі на рух містять опис процесу руху двох тіл, а задачі на спільну роботу — опис процесу спільної праці. Тому перші мають у своєму складі такі величини, як відстань, швидкість та час, інші — загальний виробіток, продуктивність праці, час роботи. Але за суттю математичних залежностей між величинами, що входять у задачу, за математичною структурою та математичною моделлю їх можна віднести до особливого виду — задач на процеси.

Якщо подати математичні структури задач на одночасний рух та на спільну роботу (у яких дано продуктивність праці кожного виконавця) у вигляді таблиці, то отримаємо такі математичні структури (*опорні схеми задач на спільну роботу (3-й клас) та на одночасний рух (4-й клас)*).

	Загальний виробіток (або відстань)	Продуктивність праці (або швидкість руху)	Час роботи (або руху)
I		□	
II		□	□
I і II	?	?	

	Загальний виробіток (або відстань)	Продуктивність праці (або швидкість руху)	Час роботи (або руху)
I		□	
II	□	□	□
I і II		?	?

	Загальний виробіток (або відстань)	Продуктивність праці (або швидкість руху)	Час роботи (або руху)
I		?	
II	□	□	□
I і II		?	

	Загальний виробіток (або відстань)	Продуктивність праці (або швидкість руху)	Час роботи (або руху)
I		□	
II	□	?	□
I і II		?	

Спільні ознаки задач на спільну роботу і на одночасний рух поданої математичної структури:

- три взаємопов'язані величини: загальний виробіток (*або відстань*), продуктивність праці (*або швидкість руху*), час роботи (*або руху*).
- три випадки: перші два стосуються роботи (*руху*) кожного з двох об'єктів, а третій — їх спільної роботи (*руху*);
- чотири числові значення: продуктивність праці (*або швидкість руху*) першого об'єкта, продуктивність праці (*або швидкість руху*)

другого об'єкта, загальний виробіток (*або відстань*) від їх спільної праці (*спільного руху*) та час спільної праці (*спільного руху*); три з них дано, а одне є шукане.

Математичну структуру задач на одночасний рух та на спільну роботу можна подати у вигляді узагальненої опорної схеми задач на спільну роботу та на одночасний рух.

	Загальний виробіток (або відстань)	Продуктивність праці (або швидкість руху)	Час руху (або роботи)
I		N_1 / V_1	
II		N_2 / V_2	
I і II	A / S	?	t

N_1 — продуктивність праці першого виконавця;
 N_2 — продуктивність праці другого виконавця;
A — загальний виробіток при спільній праці;
 V_1 — швидкість першого тіла;
 V_2 — швидкість другого тіла;
S — відстань між тілами на момент початку або на момент закінчення руху;
t — час спільного руху або час спільної праці

Задачі на спільну роботу, у яких продуктивність спільної праці знаходять дією додавання, та задачі на одночасний рух у різних напрямках (назустріч та в протилежних напрямках) мають два способи розв'язування (*табл. 1*).

Таблиця 1

Способи розв'язування задач на спільну роботу, у яких спільну продуктивність роботи двох виконавців знаходять дією додавання, та на одночасний рух у різних напрямках

Перший спосіб	Другий спосіб
$A = N_1 \cdot t + N_2 \cdot t$ $S = V_1 \cdot t + V_2 \cdot t$	$A = (N_1 + N_2) \cdot t$ $S = (V_1 + V_2) \cdot t$
$t = A : (N_1 + N_2)$ $t = S : (V_1 + V_2)$	
$N_1 = (A - N_2 \cdot t) : t$ $N_2 = (A - N_1 \cdot t) : t$ $V_1 = (S - V_2 \cdot t) : t$ $V_2 = (S - V_1 \cdot t) : t$	$N_1 = A : t - N_2$ $N_2 = A : t - N_1$ $V_1 = S : t - V_2$ $V_2 = S : t - V_1$

Задачі на спільну роботу, у яких продуктивність спільної праці являє собою різницю продуктивностей кожного виконавця, та задачі на рух в одному напрямку (навздогін та з відставанням) також мають два способи розв'язування (табл. 2).

Таблиця 2

Способи розв'язування задач на спільну роботу, у яких спільну продуктивність роботи двох виконавців знаходять дією віднімання, та на рух в одному напрямку

Перший спосіб	Другий спосіб
$A = N_1 \cdot t - N_2 \cdot t$ $S = V_1 \cdot t - V_2 \cdot t$	$A = (N_1 - N_2) \cdot t$ $S = (V_1 - V_2) \cdot t$
$t = A : (N_1 - N_2)$ $t = S : (V_1 - V_2)$	
$N_1 = (A + N_2 \cdot t) : t$ $N_2 = (N_1 \cdot t - A) : t$ $V_1 = (S + V_2 \cdot t) : t$ $V_2 = (V_1 \cdot t - S) : t$	$N_1 = A : t + N_2$ $N_2 = N_1 - A : t$ $V_1 = S : t + V_2$ $V_2 = V_1 - S : t$

Слід зазначити, що в курсі початкової математики розглядають задачі на спільну роботу та на рух у різних напрямках дещо ускладненої математичної структури.

	Загальний виробіток (або відстань)	Продуктивність праці (або швидкість руху)	Час роботи (або руху)		Загальний виробіток (або відстань)	Продуктивність праці (або швидкість руху)	Час роботи (або руху)
I	□	?	□	I	□	?	□
II	□	?	□	II	□	?	□
I і II	?	?	□	I і II	□	?	□
	Загальний виробіток (або відстань)	Продуктивність праці (або швидкість руху)	Час роботи (або руху)		Загальний виробіток (або відстань)	Продуктивність праці (або швидкість руху)	Час роботи (або руху)
I	?	?	□	I	□	?	□
II	□	?	□	II	?	?	□
I і II	□	?	□	I і II	□	?	□
	Загальний виробіток (або відстань)	Продуктивність праці (або швидкість руху)	Час роботи (або руху)		Загальний виробіток (або відстань)	Продуктивність праці (або швидкість руху)	Час роботи (або руху)
I	□	?	?	I	□	?	□
II	□	?	□	II	□	?	?
I і II	□	?	□	I і II	□	?	□

Спільні ознаки задач на спільну роботу й на одночасний рух поданої математичної структури:

1) **три взаємопов'язані величини:** загальний виробіток (або відстань), продуктивність праці (або швидкість руху), час руху (або роботи);

2) **три випадки:** перші два стосуються роботи (або руху) кожного з двох об'єктів, а третій — їх спільної роботи (або руху);

3) **шість числових значень:** загальний виробіток (або відстань) першого об'єкта, загальний виробіток (або відстань) другого об'єкта, загальний виробіток (або відстань) від їх спільної праці (спільного руху) та час роботи (або руху) першого об'єкта, час роботи (або руху) другого об'єкта, час їх спільної праці (спільного руху); п'ять із них дано, а одне є шукане.

Математичну структуру задач на одночасний рух та на спільну роботу дещо ускладненої математичної структури можна подати у вигляді узагальненої таблиці.

	Загальний виробіток (або відстань)	Продуктивність праці (або швидкість руху)	Час роботи (або руху)
I	A_1 / S_1	?	t_1
II	A_2 / S_2	?	t_2
I і II	A / S	?	t

Спосіб розв'язування цих задач, на відміну від розглянутих вище задач, передбачає виконання ще двох арифметичних дій, унаслідок чого задачі цієї математичної структури зводяться до попередніх.

Отже, задачі на спільну роботу та на одночасний рух мають однакові математичні структури та аналогічні способи розв'язування, що дає можливість об'єднати їх в одну групу й розробляти методику навчання молодших школярів розв'язування цих задач у порівнянні задля узагальнення їх математичних структур та способів розв'язування.

Методика формування вміння розв'язувати типові задачі на процеси

Теоретичну основу методики формування в молодших школярів уміння розв'язувати задачі певних типів становить теорія змістовних узагальнень В. Давидова, що реалізує навчання за третім типом (П. Гальперін).

Вивчення *задач на спільну роботу та на рух відбувається за загальною програмою:*

1. Задачі на спільну роботу, у яких дано продуктивність кожного виконавця, на знаходження часу спільної праці та обернені до них: на знаходження загального виробітку спільної праці, на знаходження продуктивності праці одного з виконавців (3-й клас).

2. Задачі на спільну роботу, у яких не дано продуктивність кожного виконавця, на знаходження продуктивності спільної праці (спільна продуктивність являє собою суму продуктивностей кожного виконавця) (4-й клас).

3. Задачі на спільну роботу, у яких не дано продуктивність кожного виконавця, на знаходження часу спільної праці та обернені до них: на знаходження загального виробітку при спільній праці, на знаходження продуктивності або часу роботи одного з виконавців (спільна продуктивність являє собою суму продуктивностей кожного виконавця) (4-й клас).

4. Задачі на спільну роботу, у яких не дано продуктивність кожного виконавця, а спільна продуктивність являє собою різницю продуктивностей виконавців (4-й клас).

5. Задачі на одночасний рух у різних напрямках (назустріч або в протилежних напрямках) на знаходження відстані та швидкості: перший спосіб розв'язання (4-й клас).

6. Задачі на одночасний рух у різних напрямках на знаходження відстані та швидкості: другий спосіб розв'язання. Задачі на знаходження часу (4-й клас).

7. Задачі на рух у різних напрямках у випадку неодночасного початку руху тіл.

8. Зіставлення задач на спільну роботу, у яких спільна продуктивність являє собою суму продуктивностей кожного виконавця, та задач на одночасний рух у різних напрямках (назустріч або в протилежних напрямках). Узагальнення істотних ознак математичних структур задач та способів їх розв'язання (4-й клас).

9. Перетворення задачі на рух у різних напрямках на задачу на спільну роботу, у якій спільну продуктивність знаходять дією додавання, і навпаки (4-й клас).

6. Задачі на рух в одному напрямку: задачі з двома варіантами руху — у різних напрямках та в одному напрямку (4-й клас).

7. Зіставлення задач на спільну роботу, у яких спільна продуктивність являє собою різницю продуктивностей виконавців, та задач на одночасний рух в одному напрямку. Узагальнення істотних ознак математичних структур задач та способів їх розв'язання (4-й клас).

8. Задачі на рух за течією та проти течії річки (4-й клас).

Центральною ідеєю методики навчання учнів розв'язування цих типів задач *є всебічний аналіз і дослідження задачі залежно від таких її трансформацій:*

- за зміною ситуації задачі й визначення впливу цієї зміни на розв'язання задачі;
- за зміною числових даних і визначення впливу цієї зміни на план розв'язання задачі;
- за зміною шуканої величини й визначення впливу цієї зміни на план розв'язання задачі.

Для реалізації загальної програми розроблено методики навчання молодших школярів розв'язування задач на спільну роботу та навчання розв'язування задач на рух.

1. МЕТОДИКА НАВЧАННЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ НА СПІЛЬНУ РОБОТУ

1.1. Задачі на спільну роботу в 3-му класі

1.1.1. Підготовча робота до введення задач на спільну роботу

На цьому етапі слід актуалізувати знання групи взаємопов'язаних величин: загальний виробіток, продуктивність праці, час роботи, та взаємозв'язок між цими величинами. Це можна зробити під час розв'язання простих та складених задач, що містять цю групу величин.

Ключем до розв'язання задач на спільну роботу є знаходження «спільної продуктивності» двох виконавців. Тому на етапі підготовчої роботи учні розв'язують прості задачі на знаходження спільної продуктивності. При цьому корисно ставити запитання: «Більше чи менше, ніж... (продуктивність одного виконавця), зроблять обидва виконавці, якщо працюватимуть разом?» Відповідь на це запитання допоможе уникнути можливих помилок у розв'язанні задач на спільну роботу, якщо отримаємо більше часу, ніж час роботи кожного виконавця.

1. Батько може скопати рядок за 30 хв, а син — за 40 хв. Якщо вони працюватимуть разом, щоб скопати цей рядок, їм потрібно більше чи менше часу, ніж 30 хв? Ніж 40 хв?

Учні міркують приблизно так: «Потрібно часу менше, ніж 30 хв, тому що батькові допомагає син».

2. Одна друкарка за годину друкує 5 сторінок, інша — 4. Скільки сторінок надрукують за годину обидві друкарки?

— Більше чи менше ніж 5 сторінок надрукують за 1 год обидві друкарки? (Більше, тому що першій допомагатиме друга.)

— Що **варто** знати, щоб дізнатися, скільки сторінок надрукують разом обидві друкарки за 1 год? (Слід знати два числові значення: скільки сторінок друкує перша друкарка — 5, скільки сторінок друкує друга друкарка — 4.)

— Якою арифметичною дією відповімо на запитання задачі? (Дією додавання.)

— Запишіть розв'язання. ($5 + 4 = 9$ (с.))

— Дайте відповідь на запитання задачі. (Відповідь: 9 сторінок надрукують друкарки, якщо працюватимуть разом.)

1.1.2. Ознайомлення із задачами на спільну роботу, у яких дано продуктивність кожного виконавця

Задача нової математичної структури являє собою продовження попередньої задачі на знаходження спільної продуктивності. У цій задачі треба знайти час роботи, за який обидва виконавці виконають певний обсяг роботи.

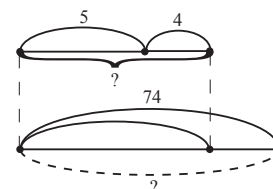
Задача 1. Одна друкарка друкує за годину 5 сторінок, інша 4. Скільки годин вони мають працювати разом, щоб надрукувати 72 сторінки?

Розглянемо методику роботи над цією задачею:

— Про кого йдеться в задачі? (Про друкарок.)

— Розгляньте короткий запис задачі.

	Продуктивність праці — кількість сторінок за 1 год (с.)	Загальний виробіток — загальна кількість сторінок (с.)	Час роботи (год)
I	5		
II	4		
I і II	?	72	?



— За коротким записом поясніть, що означають числа задачі. (Число 5 означає продуктивність праці першої друкарки. Число 4 — продуктивність праці другої друкарки. Число 72 — загальний виробіток при спільній роботі.)

— Назвіть запитання задачі. (Треба знайти час спільної роботи двох друкарок.)

— Обидві друкарки надрукують 72 сторінки швидше чи повільніше ніж перша друкарка? Ніж друга друкарка? (Швидше, тому що за годину вони друкуватимуть більше сторінок, якщо працюватимуть разом.)

— За одну годину вони разом надрукують більше чи менше сторінок ніж 5? Ніж 4? (Вони разом за 1 год надрукують більше сторінок, тому що одній допомагатиме інша.)

— Порівняйте цю задачу з попередньою. Що цікавого ви помітили? (Ця задача є продовженням попередньої.)

— Що в них спільного? (Спільне в умові — кількість сторінок, що друкує кожна друкарка за 1 год.)

— Що в них відмінного? (У другій задачі в умові йдеться про загальну кількість сторінок, що вони мають надрукувати разом. Та в цих задачах інші запитання.)

— Як ця відмінність вплине на розв'язання задачі? (Тут буде ще одна арифметична дія.)

— Повторіть запитання задачі. Що **варто** знати, щоб на нього відповісти? (Слід знати два числові значення: загальну кількість сторінок, відомо — 72, та кількість сторінок, що друкують обидві друкарки за 1 год, невідомо.)

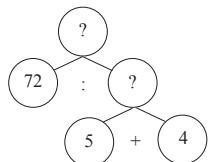
— Якою дією дамо відповідь на запитання задачі? (Дією ділення.)

— Чи можна відразу відповісти на запитання задачі? (*Ні, тому що ми не знаємо, скільки сторінок надрукують обидві друкарки за 1 год.*)

— Що для цього **варто** знати? (**Слід знати два числові значення: кількість сторінок, що друкує перша друкарка за 1 год, відомо — 5, та кількість сторінок, що друкує інша друкарка за 1 год, відомо — 4.)**

— Якою арифметичною дією дамо відповідь на запитання? (*Дією додавання.*)

— Чи можна відразу відповісти на це запитання? (*Так. Аналіз закінчено.*)



— Складіть план розв'язування задачі.

— Запишіть розв'язання по діях із поясненням.

Розв'язання:

1) $5 + 4 = 9$ (с.) — друкують обидві друкарки разом за 1 год; продуктивність спільної праці.

2) $72 : 9 = 8$ — стільки годин потрібно обом друкаркам, щоб надрукувати 72 сторінки.

Або $72 : (5 + 4) = 8$ (год).

— Запишіть відповідь. (**Відповідь:** 8 год друкарки мають працювати разом, щоб надрукувати 72 сторінки.)

— Про що ми дізналися в другій задачі? (*Ми дізналися про час їхньої спільної праці. Це задача на спільну роботу.*)

— Щоб впізнати задачу на спільну роботу, на які слова слід орієнтуватися? (*«Працюючи разом» або їх синоніми.*)

Зміна ситуації задачі 1 і дослідження впливу цієї зміни на розв'язання задачі

— Змініть ситуацію задачі 1 (с.10): уявімо, що працюватимуть два насоси. Складіть нову задачу.

	Продуктивність праці — маса води за 1 год (т)	Загальний виробіток — загальна маса води (т)	Час роботи (год)
I	5		
II	4		
I і II	?	72	?

— Чи це задача на спільну роботу?

— Чи треба її розв'язувати? (*У нас уже є розв'язання цієї задачі, слід змінити лише пояснення.*)

Зміна числових даних задачі й дослідження впливу цієї зміни на план розв'язування задачі

— Змініть числові дані попередньої задачі. Розкажіть одержану задачу.

Учитель стежить, щоб число, яке означає загальну величину, ділилося на суму двох чисел, які означають одиницю цієї величини.

	Продуктивність праці — маса води за 1 год (т)	Загальний виробіток — загальна маса води (т)	Час роботи (год)
I	7		
II	6		
I і II	?	39	?

— Чи подібна ця задача до попередньої? До якого виду її можна віднести?

— Якщо всі ці задачі належать до задач на спільну роботу, то вони, мабуть, мають однаковий план розв'язування?

— Розкажіть план розв'язування цієї задачі.

— Як зміна числових даних задачі вплинула на її розв'язання? (*Слід змінити відповідні числові дані в арифметичних діях, а пояснення залишити без виправлень.*)

— Як упізнати задачу на спільну роботу? За яким планом вони розв'язуються?

Узагальнимо математичну структуру **задач на спільну роботу** та план їх розв'язання:

Істотні ознаки задач на спільну роботу:

- три величини: загальний виробіток, продуктивність праці і час роботи;
- три випадки: перший випадок стосується роботи першого об'єкта, другий — роботи другого об'єкта, а третій — спільної роботи обох об'єктів;
- до перших двох випадків дано продуктивність роботи кожного об'єкта;
- до третього випадку дано загальний виробіток спільної праці, а час спільної праці є шуканим.

	Загальний виробіток	Продуктивність праці	Час роботи
I			□
II		□	□
I і II		?	?

План розв'язання

- Знаходимо спільну продуктивність дією додавання.
- Знаходимо час спільної роботи дією ділення, відповідаємо на запитання задачі.

Зміна шуканого задачі I і дослідження впливу цієї зміни на математичну структуру задачі та план її розв'язання

— Складіть і розв'яжіть обернену задачу до задачі 1 (с.10) на знаходження загального виробітку спільної праці.

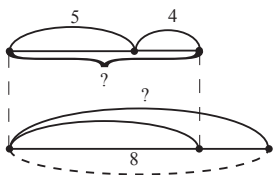
5, 4, 72, 8. — пряма задача.

5, 4, 72, 8. — перша обернена задача.

Задача. Одна друкарка друкує за годину 5 сторінок, а інша — 4 сторінки. Скільки сторінок вони надрукують за 8 год, якщо працюватимуть разом?

— Виконайте зміни в короткому записі попередньої задачі.

	Продуктивність праці — кількість сторінок за 1 год (с.)	Загальний виробіток — загальна кількість сторінок (с.)	Час роботи (год)
I	5		
II	4		
I і II	?	?	8



— Як ця зміна вплинула на математичну структуру задачі? (Математична структура задачі майже не змінилася: дано ті самі величини, три випадки, до перших двох випадків дано продуктивність кожного, до третього випадку дано час роботи, а загальний виробіток є шуканим. Це також задача на спільну роботу, тому що запитується про загальний виробіток при спільній роботі.)

— За яким планом розв'язуються задачі на спільну роботу? (Першою дією знаходимо спільну продуктивність, а другою — відповідаємо на запитання задачі.)

— Як ця зміна вплине на розв'язання задачі? (Зміниться друга дія, тому що ми знаходимо загальний виробіток, а його шукають дією множення.)

Розв'язання

1) $5 + 4 = 9$ (с.) — за 1 год друкують обидві друкарки, працюючи разом; продуктивність спільної праці.

2) $9 \cdot 8 = 72$ (с.) — за 8 год надрукують обидві друкарки, працюючи разом.

Або $(5 + 4) \cdot 8 = 72$ (с.).

Слід зазначити, що за математичною структурою цю задачу можна віднести і до задач на знаходження суми двох добутоків.

Розв'язання, другий спосіб

1) $5 \cdot 8 = 40$ (с.) — надрукує перша друкарка за 8 год.

2) $4 \cdot 8 = 32$ (с.) — надрукує друга друкарка за 8 год.

3) $40 + 32 = 72$ (с.) — надрукують обидві друкарки за 8 год.

Або $5 \cdot 8 + 4 \cdot 8 = 72$ (с.).

Відповідь: 72 сторінки надрукують обидві друкарки за 8 год, працюючи разом.

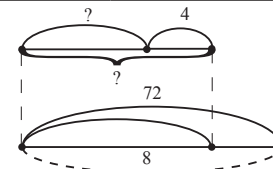
— Складіть другу обернену задачу на знаходження продуктивності роботи першої друкарки.

5, 4, 72, 8. — друга обернена задача.

Задача. Дві друкарки, працюючи разом за 8 год надрукували 72 сторінки. Скільки сторінок за 1 год друкує перша друкарка, якщо інша за 1 год друкує 4 сторінки?

— Виконайте зміни в короткому записі попередньої задачі:

	Продуктивність праці — кількість сторінок за 1 год (с.)	Загальний виробіток — загальна кількість сторінок (с.)	Час роботи (год)
I	?		
II	4		
I і II	?	72	8



— Як ця зміна вплинула на математичну структуру задачі? (Це так само задача на спільну роботу, але в ній інше шукане.)

— Згадайте план розв'язування задач на спільну роботу. Як ця зміна вплине на план розв'язування задачі? (Першою дією ми так само знайдемо спільну продуктивність двох друкарки, але не за даними продуктивностей кожної, а за загальним виробітком при спільній роботі та за часом спільної роботи. Другою дією дамо відповідь на запитання задачі та знайдемо продуктивність першої друкарки дією віднімання.)

Розв'язання:

1) $72 : 8 = 9$ (с.) — за 1 год друкують обидві друкарки, працюючи разом; спільна продуктивність.

2) $9 - 4 = 5$ (с.) — за 1 год друкує перша друкарка.

Або $72 : 8 - 4 = 5$ (с.).

Відповідь: 5 сторінок друкує за 1 год перша друкарка.

— Складіть і розв'яжіть третю обернену задачу на знаходження продуктивності другої друкарки?

— Як ця зміна вплине на математичну структуру задачі?

— Як ця зміна вплине на розв'язання задачі?

— Узагальнимо математичну структуру задач на спільну роботу та план їх розв'язання (табл. 3).

Щоб розпізнати задачу на спільну роботу слід уміти переформулювати запитання задачі.

Наприклад: запитання «Скільки відер води дадуть обидва насоси за хвилину?» можна переформулювати так: «Скільки відер води дадуть обидва насоси за хвилину, працюючи разом?»

Істотні ознаки задач на спільну роботу:

- три взаємопов'язані величини: загальний виробіток, продуктивність праці, час роботи;
- три випадки: перший стосується роботи першого виконавця, другий — роботи другого виконавця, а третій — спільної роботи двох виконавців;
- дано продуктивності кожного виконавця, а шуканим є час спільної роботи (загальний виробіток при спільній роботі), або дано загальний виробіток та час спільної роботи, а шуканим є продуктивність праці і одного з виконавців.

Таблиця 3

Опорні схеми та план розв'язання прямих та обернених задач на спільну роботу. 3-й клас

Пряма задача			
	Загальний виробіток	Продуктивність праці	Час роботи
I		□	
II		□	
I і II	□	?	?

Перша обернена задача			
	Загальний виробіток	Продуктивність праці	Час роботи
I			
II		?	
I і II	□	?	□

Друга обернена задача			
	Загальний виробіток	Продуктивність праці	Час роботи
I		□	
II		□	
I і II	?	?	□

Третя обернена задача			
	Загальний виробіток	Продуктивність праці	Час роботи
I		?	
II		□	
I і II	□	?	□

План розв'язання

1. Знаходимо спільну продуктивність.
2. Відповідаємо на запитання

1.1.3. Формування вміння розв'язувати задачі на спільну роботу.

Учні розв'язують задачі на спільну роботу на знаходження часу або загального виробітку при спільній праці з наступним складанням і розв'язуванням обернених задач.

1. Одна друкарка за день набирає 20 сторінок рукопису, інша — 24 сторінки. Скільки сторінок вони наберуть за 5 днів, якщо працюватимуть разом? Складіть і розв'яжіть обернені задачі.

Також на цьому етапі пропонуємо дітям дещо ускладнені задачі.

2. Перший трактор за 8 год виорює 16 га поля, інший — за 1 год на 1 га більше. За скільки годин обидва трактори, працюючи разом, виорюють 120 га?

На цьому етапі учні виконують логіко-семантичний аналіз формулювання задачі й розпізнають задачі, далі згадують узагальнений план розв'язування задач на спільну роботу й застосовують його.

Щодо роботи над задачею після її розв'язання пропонуємо учням скласти й розв'язати декілька обернених задач. Так здійснюється подальше усвідомлення способів знаходження спільної продуктивності: спільна продуктивність з одного боку — це сума продуктивностей кожного виконавця, а з іншого — частка загального виробітку й часу спільної роботи.

1.2. Задачі на спільну роботу в 4-му класі

1.2.1. Підготовча робота до введення задач на спільну роботу ускладненої математичної структури

Актуалізуємо вміння розв'язувати задачі, які містять такі величини, як загальний виробіток, продуктивність праці та час роботи, різні математичні структури, зокрема й на знаходження четвертого пропорційного. Окрім цього, учні згадують істотні ознаки та способи розв'язання задач на спільну роботу, які пропонувалися в 3-му класі.

1. Слюсар за 3 год зробив 15 деталей. Скільки деталей він зробить за 5 год, якщо за кожну годину робитиме однакову кількість деталей?

2. За планом завод мав випускати щодня 30 верстатів. За тиждень (5 робочих днів) він випустив 300 верстатів. Скільки верстатів випустив завод понад плану за тиждень?

3. Тесля виготовляє за день 12 рам, а його помічник — 7. За скільки робочих днів вони виготовлять 95 рам?

До третьої задачі ставимо додаткове завдання: «Склади й розв'яжи обернені задачі».

Так само як і в 3-му класі на етапі підготовки пропонуємо учням задачі на знаходження спільної продуктивності, але не прості, а складені. У цих задачах не дано продуктивності роботи кожного об'єкта, але відомо загальний виробіток та час роботи кожного з виконавців.

Задача. 640 відер води перший насос може викачати за 8 хв, інший викачує 420 відер води за 6 хв. Скільки відер води викачають за 1 год обидва насоси, якщо працюватимуть разом?

Учні записують цю задачу у формі таблиці; пояснюють числа й запитання задачі.

— Чи впізнаєте ви цю задачу? *(Так, це задача на спільну роботу, вона містить три величини: загальний виробіток, продуктивність праці, час роботи; є три випадки — перший стосується роботи першого насоса, другий — роботи другого насоса, а третій — їх спільної роботи.)*

— Чим ця задача відрізняється від задач на спільну роботу, які ми розв'язували? *(У ній дано загальний виробіток та час роботи кожного насоса, нічого не дано стосовно спільної роботи обох насосів, шуканою є спільна продуктивність.)*

— Що є шуканим у задачі? *(Спільна продуктивність праці двох насосів.)*

— Які способи знаходження спільної продуктивності нам відомі? *(1 — додати продуктивності кожного, 2 — поділити загальний виробіток при спільній роботі на час спільної роботи.)*

— Який спосіб можна застосувати в цій задачі? *(Другий спосіб застосувати не можна, тому що не дано загального виробітку та часу спільної роботи.)*

— Що варто знати, щоб відповісти на запитання задачі? *(Слід знати два числові значення: продуктивність першого насоса, невідомо, та продуктивність другого насоса, невідомо.)*

— Якою арифметичною дією дамо відповідь на це запитання? *(Дією додавання.)*

— Чи можна відразу відповісти на це запитання? *(Ні, тому що нам невідомі обидва числові значення.)*

— Що варто знати, щоб знайти продуктивність першого насоса? *(Слід знати два числові значення: загальний виробіток першого насоса, відомо — 24 т, та час його роботи, відомо — 6 год.)*

— Якою арифметичною дією дамо відповідь на це запитання? *(Дією ділення.)*

— Чи можна відразу відповісти на це запитання? *(Так, нам відомі обидва числові значення.)*

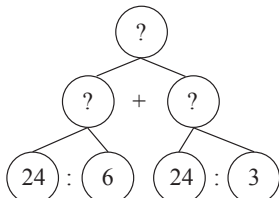
— Чи зможемо ми тепер відповісти на запитання задачі? *(Ні, ми не знаємо продуктивності другого насоса.)*

— Що варто знати, щоб на нього відповісти? *(Треба знати два числові значення: загальний виробіток другого насоса, відомо — 24 т, та час його роботи, відомо — 3 год.)*

— Якою арифметичною дією дамо відповідь на це запитання? *(Дією ділення.)*

— Чи можна відразу відповісти на це запитання? (Так, нам відомі обидва числові значення.)

— Чи можна тепер відповісти на запитання задачі? (Так, ми від запитання задачі перейшли до числових даних, аналіз закінчено.)



— Складіть план розв'язання задачі. (Першою дією дізнаємося про продуктивність першого насоса. Другою — про продуктивність другого насоса. Третьою — про спільну продуктивність.)

— Запишіть розв'язання задачі.

Розв'язання:

- 1) $640 : 8 = 80$ (в.) води качає перший насос за 1 хв;
 - 2) $420 : 6 = 70$ (в.) води качає другий насос за 1 хв;
 - 3) $80 + 70 = 150$ (в.) качають за 1 хв обидва насоси, працюючи разом.
- Або $640 : 8 + 420 : 6 = 150$ (в.)

Відповідь: 150 відер води дадуть обидва насоси за хвилину.

Отже, на цьому етапі опрацьовуємо **вміння знаходити спільну продуктивність за даними загального виробітку та часу роботи кожного виконавця.**

Щоб знайти спільну продуктивність двох виконавців треба:

- 1) знайти продуктивність першого виконавця (дією ділення);
- 2) знайти продуктивність другого виконавця (дією ділення);
- 3) знайти спільну продуктивність (дією додавання).

1.2.2. Ознайомлення з типовими задачами на спільну роботу

Існує декілька варіантів методики ознайомлення учнів 4-го класу із задачами на спільну роботу:

1) Як підготовча розв'язується задача на спільну роботу математичної структури 3-го класу на знаходження часу спільної праці. Після її розв'язання задача ускладнюється: уже не дано продуктивностей кожного виконавця, але є дві додаткові умови, за якими про це можна дізнатися. Отже, змінюється умова задачі, але залишається те саме запитання.

1. Тесля виготовляє за день 12 рам, а його помічник — 7. За скільки робочих днів вони виготовлять 95 рам?

2. Тесля виготовляє за 3 дні 36 рам, а його помічник — 21. За скільки робочих днів вони виготовлять 95 рам?

2) Як підготовча пропонується задача на знаходження спільної продуктивності за даними загального виробітку (він однаковий для обох виконавців) та часу роботи кожного виконавця. Діти згадують, як знаходиться спільна продуктивність і формулюють план розв'язування цієї задачі. Далі змінюється запитання задачі і шуканим стає час спільної роботи при тому самому загальному виробітку (задача 1).

Розглянемо цей методичний підхід детально.

Підготовча задача. 24 т води перший насос може викачати за 6 год, а другий — за 3 год. Скільки тонн води викачають за 1 год обидва насоси, якщо працюватимуть разом?

— Що треба знайти в цій задачі? (Спільну продуктивність.)

— Як знайти спільну продуктивність? (Треба знайти продуктивності кожного насоса, а потім їх додати.)

Задача 1. 24 т води перший насос може викачати за 6 год, а другий — за 3 год. За скільки годин викачають цю воду обидва насоси, якщо будуть працювати разом?

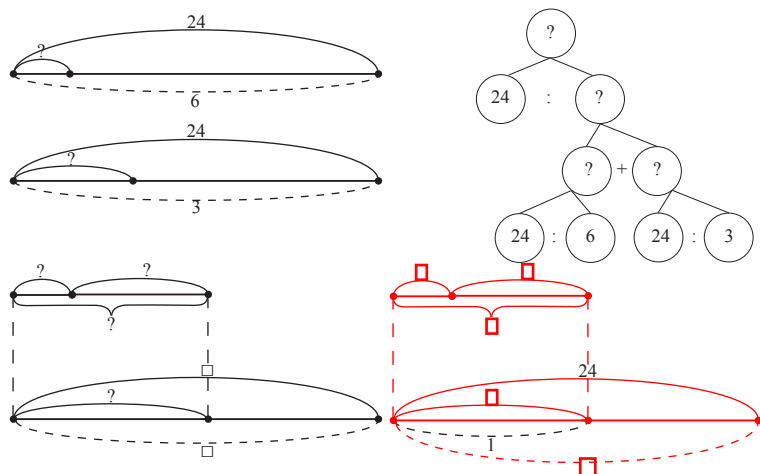
Учні читають задачу, записують її коротко у формі таблиці:

	Час роботи (год)	Продуктивність праці — маса води за 1 год (т)	Загальний виробіток — загальна маса води (т)
I насос	6	?	24
II насос	3	?	24
I і II насоси	?	?	24

Учні за таблицею пояснюють числа задачі й запитання.

З'ясовують, скільки часу потрібно першому насосу, щоб викачати 24 т води; скільки часу потрібно другому насосу, щоб викачати 24 т води; більше чи менше часу ніж 6 год (ніж 3 год) потрібно буде обом насосам, щоб викачати 24 т води.

Порівнюють цю задачу з попередньою і встановлюють, що вона є продовженням попередньої задачі; проводять аналітичний пошук розв'язання задачі:



Далі учні складають план розв'язування задачі та записують її розв'язання по діях із поясненням.

Розв'язання:

- 1) $24 : 6 = 4$ (т) — викачує перший насос за 1 год; продуктивність першого виконавця;
- 2) $24 : 3 = 8$ (т) — викачує другий насос за 1 год; продуктивність другого виконавця;
- 3) $4 + 8 = 12$ (т) — викачують обидва насоси за 1 год, працюючи разом; продуктивність спільної праці;
- 4) $24 : 12 = 2$ — за стільки годин вони викачають 24 л води, працюючи разом.

— Як зміна запитання задачі вплинула на її розв'язання? (Додалася ще одна арифметична дія.)

— Про що ми дізналися кожною дією? (Першою дією ми дізналися про продуктивність першого насоса. Другою дією визначили продуктивність другого насоса. Третьою дією — спільну продуктивність. Четвертою дією дали відповідь на запитання задачі й визначили час спільної роботи.)

Зміна ситуації задачі 1 і дослідження впливу цієї зміни на математичну структуру задачі та розв'язання задачі

У задачі 1 (с.21) містяться величини: загальний виробіток — загальний об'єм води (24 т води треба викачати), час, який витрачено на цю роботу (3 год або 6 год) — та продуктивність праці — об'єм води, яку викачує насос за 1 год.

— Змініть ситуацію задачі. (Наприклад, загальний виробіток — загальна кількість деталей, продуктивність праці — кількість деталей за 1 год, час роботи).

— Розкажіть одержану задачу.

— Складіть план розв'язування цієї задачі.

— Чи треба записувати розв'язання цієї задачі? (Ні, не треба. У неї буде таке саме розв'язання, що й у попередньої задачі.)

— Чому? (Ця задача має майже такий самий короткий запис, лише інший зміст тих самих величин і числових даних. Тому слід лише змінити пояснення.)

Зміна числових даних задачі та дослідження впливу цієї зміни на математичну структуру й план розв'язування задачі

— Залишіть у попередній задачі величини такими самими, але змініть числові значення цих величин. (При цьому вчитель стежить, щоб учні обрали таке числове значення загальної величини, щоб можна було розв'язати задачу.)

— Розкажіть план розв'язування одержаної задачі.

— Змініть розв'язання попередньої задачі, щоб отримати розв'язання цієї задачі. Що варто виправити? (Слід замінити відповідні числа в арифметичних діях, а пояснення лишити тими самими.)

— Порівняйте всі задачі. (В усіх задачах запитання містить слова «якщо працюватимуть разом» — це задачі на спільну роботу.)

— Порівняйте короткі записи цих задач на спільну роботу. (Ці задачі мають дуже схожі короткі записи (мають одну математичну структуру), а тому вони розв'язуються за одним планом (табл. 4).)

Істотні ознаки задач на спільну роботу, у яких шуканим є час спільної праці:

- три взаємопов'язані величини: загальний виробіток, продуктивність праці, час роботи;
- три випадки: перший стосується роботи першого виконавця, другий — роботи другого виконавця, а третій — спільної роботи обох виконавців;
- для двох випадків (першого і другого) дано значення загальної продуктивності й часу роботи;
- для одного з випадків (третього) дано значення загальної величини, а значення часу є шуканим.

Таблиця 4

Опорні схеми та план розв'язання задач на спільну роботу, у яких шуканим є час спільної праці. 4-й клас

	Загальний виробіток	Продуктивність праці	Час роботи
I	□	?	□
II	□	?	□
I і II	□	?	?

План розв'язання

1. Знаходимо продуктивність першого виконавця.
2. Знаходимо продуктивність другого виконавця.
3. Знаходимо спільну продуктивність.
4. Знаходимо час спільної роботи, відповідаємо на запитання задачі

Зміна шуканого задачі 1 та дослідження впливу цієї зміни на математичну структуру й план розв'язування задачі

— Складіть і розв'яжіть обернену задачу до задачі 1 (с. 21) на знаходження загального виробітку при спільній роботі.

24, 6, 24, 3, 24, ? — пряма задача

24, 6, 24, 3, ?, 2 — перша обернена задача

Задача. 24 т води перший насос може викачати за 6 год, а другий — за 3 год. Скільки тонн води викачають обидва насоси за 2 год, працюючи разом?

Учні виконують зміни в короткому записі прямої задачі:

	Час роботи (год)	Продуктивність праці — маса води за 1 год (т)	Загальний виробіток — загальна маса води (т)
I насос	6	?	24
II насос	3	?	24
I і II насоси	2	?	?

— Як ця зміна вплинула на математичну структуру задачі? (Математична структура задачі майже не змінилася: дано ті самі величини, три випадки, до перших двох випадків дано загальний виробіток та час роботи кожного, до третього випадку дано час роботи, а загальний виробіток є шуканим. Це також задача на спільну роботу, тому що запитується про загальний виробіток від спільної роботи.)

— За яким планом розв'язуються задачі на спільну роботу? (Першою дією знаходимо продуктивність першого насоса. Другою дією — продуктивність другого насоса. Третьою дією — спільну продуктивність, а четвертою — відповідаємо на запитання задачі.)

— Як ця зміна вплине на розв'язання задачі? (Три перші дії залишаться такими самими. Зміниться четверта дія, тому що ми знаходимо загальний виробіток, а його шукать дією множення.)

Розв'язання:

1) $24 : 6 = 4$ (т) — викачує перший насос за 1 год; продуктивність першого виконавця;

2) $24 : 3 = 8$ (т) — викачує другий насос за 1 год; продуктивність другого виконавця;

3) $4 + 8 = 12$ (т) — викачають обидва насоси за 1 год, працюючи разом; час спільної праці;

4) $12 \cdot 2 = 24$ (т) — викачають обидва насос за 2 год, працюючи разом.

Або $(24 : 6 + 24 : 3) \cdot 2 = 24$ (т).

Відповідь: 24 т води викачають обидва насоси за 2 год, працюючи разом.

— Порівняйте розв'язання прямої (задачі 1, с. 21) та першої оберненої задачі. Що в них спільного? (Першою дією дізнаємся про продуктивність першого насоса. Другою дією дізнаємось про продуктивність другого насоса. Третьою дією дізнаємось про спільну продуктивність. Четвертою дією відповідаємо на запитання задачі.)

— Складіть другу обернену задачу на знаходження часу роботи першого насоса.

24, ?, 24, 3, 24, 2 — друга обернена задача

Задача. 24 т води другий насос може викачати за 3 год. За скільки годин викачає цю воду перший насос, якщо, працюючи разом, цю воду вони викачають за 2 год?

Учні виконують зміни в короткому записі прямої задачі:

	Час роботи (год)	Продуктивність праці — маса води за 1 год (т)	Загальний виробіток — загальна маса води (т)
I насос	?	?	24
II насос	3	?	24
I і II насоси	2	?	24

— Як ця зміна вплинула на математичну структуру задачі? (Це так само задача на спільну роботу, але в ній інше шукане.)

— Згадайте план розв'язання задач на спільну роботу. Як ця зміна вплине на план розв'язування задачі? (Першою дією ми знайдемо спільну

продуктивність двох насосів, але не за продуктивністю кожного, а за загальним виробітком при спільній роботі й за часом спільної роботи. Другою дією — продуктивність другого насоса. Третьою дією — продуктивність першого насоса, дією віднімання. Четвертою дією дамо відповіді на запитання задачі й знайдемо час роботи першого насоса.)

Розв'язання:

1) $24 : 2 = 12$ (т) за 1 год викачують обидва насоси, працюючи разом; спільна продуктивність;

2) $24 : 3 = 8$ (т) за 1 год викачує другий насос; продуктивність другого виконавця;

3) $12 - 8 = 4$ (т) викачує перший насос за 1 год; продуктивність першого виконавця;

4) $24 : 4 = 6$ — час роботи першого насоса.

$24 : (24 : 2 - 24 : 3) = 6$ (год).

Відповідь: за 6 год може викачати перший насос 24 т води.

— Складіть і розв'яжіть третю обернену задачу на знаходження загального виробітку першого насоса?

?, 6, 24, 3, 24, 2 — третя обернена задача.

Задача. 24 т води другий насос може викачати за 3 год. Скільки тонн води викачає перший насос за 6 год, якщо, працюючи разом, цю воду вони викачують за 2 год?

Учні виконують зміни в короткому записі прямої задачі.

	Час роботи (год)	Продуктивність праці — Маса води за 1 год. (т)	Загальний виробіток — Загальна маса води (т)
I насос	6	?	?
II насос	3	?	24
I і II насоси	2	?	24

— Як ця зміна вплинула на математичну структуру задачі? (Це так само задача на спільну роботу, але в ній інше шукане.)

— Як ця зміна вплине на план розв'язування задачі? (Першою дією ми знайдемо спільну продуктивність двох насосів, але не за продуктивністю кожного, а за загальним виробітком при спільній роботі та за часом спільної роботи. Другою дією — продуктивність другого насоса. Третьою дією — продуктивність першого насоса, дією віднімання. Четвертою дією дамо відповіді на запитання задачі та знайдемо загальний виробіток першого насоса.)

Розв'язання:

1) $24 : 2 = 12$ (т) за 1 год викачують обидва насоси, працюючи разом; спільна продуктивність;

2) $24 : 3 = 8$ (т) за 1 год викачує другий насос; продуктивність другого виконавця;

3) $12 - 8 = 4$ (т) викачує перший насос за 1 год; продуктивність першого виконавця;

4) $4 \cdot 6 = 24$ (т) викачує перший насос за 6 год.

Або $(24 : 2 - 24 : 3) \cdot 6 = 24$ (т).

Відповідь: 24 т води може викачати перший насос за 6 год.

— Порівняйте другу й третю обернені задачі. Що спільного в їх розв'язаннях. (Першою дією визначаємо спільну продуктивність. Другою дією — продуктивність другого насоса. Третьою дією дізнаємось про продуктивність першого насоса. Четвертою дією відповідаємо на запитання задачі або дією ділення або множення.)

— Складіть і розв'яжіть обернену задачу на знаходження часу роботи другого насоса.

24, 6, 24, ?, 24, 2 — четверта обернена задача.

Задача. 24 т води перший насос може викачати за 6 год. За скільки годин викачає цю воду другий насос, якщо, працюючи разом, цю воду вони викачують за 2 год?

Учні виконують зміни в короткому записі прямої задачі.

	Час роботи (год)	Продуктивність праці — Маса води за 1 год. (т)	Загальний виробіток — Загальна маса води (т)
I насос	6	?	24
II насос	?	?	24
I і II насоси	2	?	24

— Як ця зміна вплинула на математичну структуру задачі? (Це так само задача на спільну роботу, але в ній інше шукане.)

— Згадайте план розв'язання задач на спільну роботу. Як ця зміна вплине на план розв'язання задачі? (Першою дією ми знайдемо спільну продуктивність двох насосів за загальним виробітком при спільній роботі та за часом спільної роботи. Другою дією — продуктивність першого насоса. Третьою дією — продуктивність другого насоса, дією віднімання. Четвертою дією дамо відповіді на запитання задачі й знайдемо час роботи другого насоса.)

Розв'язання:

1) $24 : 2 = 12$ (т) за 1 год викачують обидва насоси, працюючи разом; *спільна продуктивність*;

2) $24 : 6 = 4$ (т) викачує перший насос за 1 год; *продуктивність першого виконавця*;

3) $12 - 4 = 8$ (т) за 1 год викачує другий насос; *продуктивність другого виконавця*;

4) $24 : 8 = 3$ — час роботи другого насоса.

Або $24 : (24 : 2 - 24 : 6) = 3$ (год).

Відповідь: за 3 год може викачати другий насос 24 т води.

— Порівняйте четверту обернену задачу і третю обернену задачу.

— Порівняйте їх розв'язання. Що в них спільного? (*Першою дією знаходимо спільну продуктивність, дією ділення. Другою дією — продуктивність першого або другого насоса, дією ділення. Третьою дією — продуктивність другого або першого насоса дією віднімання. Четвертою дією відповідаємо на запитання задачі й знаходимо час роботи другого або першого насоса.*)

— Складіть і розв'яжіть п'яту обернену задачу на знаходження загального виробітку другого насосу?

24, 6, ?, 3, 24, 2 — п'ята обернена задача

Задача. 24 т води перший насос може викачати за 6 год. Скільки тон води викачає другий насос за 3 год, якщо, працюючи разом, цю воду вони викачують за 2 год?

Учні виконують зміни в короткому записі прямої задачі.

	Час роботи (год)	Продуктивність праці — маса води за 1 год. (т)	Загальний виробіток — загальна маса води (т)
I насос	6	?	24
II насос	3	?	?
I і II насоси	2	?	24

— Як ця зміна вплинула на математичну структуру задачі? (*Це так само задача на спільну роботу, але в ній інше шукане.*)

— Як ця зміна вплине на план розв'язання задачі? (*Першою дією ми знаходимо спільну продуктивність двох насосів, але не за продуктивністю кожного, а за загальним виробітком при спільній роботі та за часом спільної роботи. Другою дією — продуктивність першого насоса, дією ділення. Третьою дією — продуктивність другого насоса, дією віднімання. Четвертою дією відповідаємо на запитання задачі й знайдемо загальний виробіток другого насоса.*)

Розв'язання:

1) $24 : 2 = 12$ (т) за 1 год викачують обидва насоси, працюючи разом; *спільна продуктивність*;

2) $24 : 6 = 4$ (т) викачує перший насос за 1 год; *продуктивність першого виконавця*;

3) $12 - 4 = 8$ (т) за 1 год викачує другий насос; *продуктивність другого виконавця*;

4) $8 \cdot 3 = 24$ (т) викачує другий насос за 3 год.

Або $(24 : 2 - 24 : 6) \cdot 3 = 24$ (т).

Відповідь: 24 т води може викачати другий насос за 3 год.

— Порівняйте розв'язання 2—5 обернених задач. Що в них спільного? (*Першою дією знаходимо спільну продуктивність. Другою та третьою діями — продуктивність кожного насоса. Четвертою дією відповідаємо на запитання задачі або дією ділення, або дією множення.*)

Узагальнимо математичну структуру та план розв'язання задач на спільну роботу (*таб. 5*).

Істотні ознаки задач на спільну роботу:

- три взаємопов'язані величини: загальний виробіток, продуктивність праці, час роботи;
- три випадки: перший стосується роботи першого виконавця, другий — роботи другого виконавця, третій — спільної роботи двох виконавців.
- для двох випадків дано значення загального виробітку й часу роботи;
- для іншого випадку дано лише одне числове значення (або загального виробітку, або часу роботи), а інше — шукане.

Таблиця 5

Опорні схеми та плани розв'язування прямих і обернених задач на спільну роботу. 4-й клас

Пряма задача			
I	□	?	□
II	□	?	□
I і II	□	?	?

Перша обернена задача

	Загальний виробіток	Продуктивність праці	Час роботи
I	□	?	□
II	□	?	□
I і II	?	?	□

Друга обернена задача

	Загальний виробіток	Продуктивність праці	Час роботи
I	□	?	□
II	□	?	?
I і II	□	?	□

Третя обернена задача

	Загальний виробіток	Продуктивність праці	Час роботи
I	□	?	□
II	?	?	□
I і II	□	?	□

Четверта обернена задача

	Загальний виробіток	Продуктивність праці	Час роботи
I	?	?	□
II	□	?	□
I і II	□	?	□

П'ята обернена задача

	Загальний виробіток	Продуктивність праці	Час роботи
I	□	?	?
II	□	?	□
I і II	□	?	□

План розв'язання

1. Знаходимо продуктивність першого виконавця (*спільну продуктивність*).
2. Знаходимо продуктивність другого (*першого або другого*) виконавця.
3. Знаходимо спільну продуктивність (*продуктивність першого або другого виконавця*).
4. Відповідаємо на запитання задачі

1.2.3. Формування вміння розв'язувати типові задачі на спільну роботу

Після аналізу формулювання задачі діти встановлюють, що це задача на спільну роботу, актуалізують узагальнений план розв'язування таких задач та застосовують його. З метою перевірки правильності розв'язання задачі школярі складають і розв'язують обернені задачі.

1. Одна друкарка набирає 100 сторінок тексту за 5 днів, інша — за 4 дні. За скільки днів наберуть ці друкарки 90 сторінок тексту, якщо працюватимуть разом?

— Чи це задача на спільну роботу? (Так, тут запитується: «За скільки днів наберуть ці друкарки 90 сторінок тексту, якщо працюватимуть разом?») Вона містить взаємопов'язані величини: загальний виробіток, продуктивність праці і час роботи; також є три випадки — перший стосується роботи першої друкарки, другий — роботи другої друкарки, а третій — їхньої спільної роботи.)

— За яким планом її розв'яжемо? (Першою дією знайдемо продуктивність праці першої друкарки. Другою дією — продуктивність праці другої друкарки. Третьою дією — спільну продуктивність. Четвертою дією — час спільної роботи друкарок.)

Запишемо розв'язання виразом:

$$90 : (100 : 5 + 100 : 4) = 90 : 45 = 2 \text{ дні.}$$

Відповідь: за 2 дні наберуть обидві друкарки 90 сторінок тексту, якщо працюватимуть разом.

— Складіть і розв'яжіть обернені задачі.

Зауваження: у задачах на спільну роботу можна додавати лише продуктивності праці, але не можна додавати час, за який кожний виконує цю роботу самостійно.

2. 72 ц сіна коровам вистачить на 12 днів, а вівцям на 24 дні. На скільки днів вистачить цього сіна коровам та вівцям разом?

— До якого виду належить ця задача?

— За яким планом розв'язуються такі задачі?

3. Майстер виготовляє 120 деталей за 8 год, а працюючи разом із своїм учнем, він може зробити ту саму кількість деталей за 5 год. Скільки деталей за 1 год виготовляє учень?

4. Чоловік вип'є джку води на 30 л за 10 днів, а разом із дружиною таку саму джку за 6 днів. За скільки днів таку джку води вип'є дружина?

1.2.4. Ознайомлення із задачами на спільну роботу, у яких продуктивність спільної праці являє собою різницю продуктивностей роботи виконавців

Учням пропонують розв'язати задачу на спільну роботу на знаходження часу спільної праці, у якій продуктивність спільної праці знаходять дією додавання. Школярам також дають готове розв'язання, у якому час спільної праці знайшли додаванням часу роботи кожного виконавця. Діти пояснюють, що в задачах на спільну роботу можна додавати лише продуктивності кожного виконавця, а не можна додавати час їхньої роботи. Отже, увага учнів зосереджується на тому, що продуктивність спільної праці можна знайти дією додавання.

1. 18 т води перший насос може викачати за 6 год, а другий — за 3 год. За скільки годин викачають 18 т води обидва насоси, працюючи разом?

— Чи правильно дати таку відповідь — $6 + 3 = 9$ (год) — потрібно обом насосам, щоб викачати 18 т води? (Ні, не правильно. У задачах на спільну роботу можна додавати лише продуктивності праці, але не можна додавати час, за який кожний виконує цю роботу самостійно.)

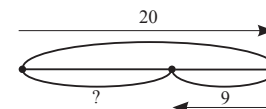
— Як ви думаєте, скільки (приблизно) годин треба двом насосам, які працюють разом, щоб виконати роботу? (Менше ніж 3 год, тому що другому допомагає перший.)

У наступній задачі виконавці «діють у протилежних напрямках» — через кран вода вливається, а через зливний отвір вода виливається.

2. За годину через верхній кран вливається 20 відер води, а через нижній кран за годину виливається 9 відер води. Скільки відер води наллється в бак за 1 год? За 2 год? За 3 год?

— Як змінюється об'єм води в баку за 1 год: збільшується чи зменшується? На скільки?

— Розгляньте схематичний малюнок.



— Чим відрізняється ця задача від попередньої? Як ми в попередній задачі знаходили продуктивність спільної роботи? Як у цій задачі слід знаходити продуктивність спільної роботи?

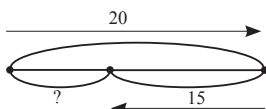
Продуктивність спільної роботи знаходять:

1) додаванням продуктивностей роботи кожного виконавця, якщо дії виконавців спрямовані на той самий результат;

2) відніманням продуктивностей роботи кожного виконавця, якщо дії виконавців спрямовані на протилежний результат.

Після засвоєння способів знаходження продуктивності спільної праці й випадків, у яких вони застосовуються, учням пропонують типову задачу на спільну роботу, у якій продуктивність спільної праці знаходиться дією віднімання. Щоб перевірити правильність розв'язання задачі, учням пропонують скласти й розв'язати різноманітні обернені задачі.

3. Через кран у ванну за 1 хв вливається 20 л води, а через зливний отвір за 1 хв виливається 15 л води. За скільки хвилин наповниться ванна об'ємом 160 л, якщо і кран, і зливний отвір будуть весь час відкриті?



— Складіть і розв'яжіть обернені задачі:

20, 15, 160, ? — пряма задача.

20, 15, ?, 32 — перша обернена задача.

20, ?, 160, 32 — друга обернена задача.

?, 15, 160, 32 — третя обернена задача.

4. У резервуарі було 20 т палива. Щоранку з нього брали 5 т палива, а ввечері доливали 3 т палива. На скільки днів вистачить цього палива? Через скільки днів у резервуарі залишиться 8 т палива?

2. МЕТОДИКА НАВЧАННЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ НА РУХ

Під задачами на одночасний рух у різних напрямках розуміють задачі на рух двох тіл одне відносно іншого, якщо вони розпочали рух в один і той самий час, у напрямку або назустріч один одному, або в протилежних напрямках.

Реалізовано підхід, коли задачі на одночасний рух назустріч і одночасний рух у протилежних напрямках розглядаються одночасно. Спочатку учні навчаються розв'язування задач на знаходження відстані та швидкості першим способом, і лише після засвоєння першого способу вводиться другий спосіб розв'язування задач на знаходження відстані та швидкості. Опанувавши другий спосіб розв'язування задач на одночасний рух у різних напрямках, учні вивчають задачі на знаходження часу, які розв'язуються лише другим способом.

Вивчення задач на одночасний рух у різних напрямках (назустріч та в протилежних напрямках) здійснюється за планом:

1. Підготовча робота до введення задач на одночасний рух у різних напрямках.

2. Ознайомлення із задачами на рух у різних напрямках. Задачі на знаходження відстані. Перший спосіб розв'язання.

3. Задачі на знаходження швидкості. Перший спосіб розв'язання.

4. Задачі на знаходження відстані та швидкості. Другий спосіб розв'язання.

5. Задачі на знаходження часу.

6. Формування вміння розв'язувати задачі на одночасний рух у різних напрямках.

7. Узагальнення математичних структур і способів розв'язання задач на одночасний рух у різних напрямках та задач на спільну роботу.

8. Підготовча робота до введення задач на рух в одному напрямку: навздогін або з відставанням.

9. Ознайомлення із задачами на рух в одному напрямку.

10. Формування вміння розв'язувати задачі на рух в одному напрямку.

11. Узагальнення математичних структур задач на рух в одному напрямку й задач на спільну роботу, у яких продуктивність спільної праці знаходять дією віднімання.

Поданий план вивчення задач на одночасний рух у різних напрямках реалізовано в *методиці навчання молодших школярів розв'язування задач на рух*.

2.1. Задачі на одночасний рух у різних напрямках

2.1.1. Підготовча робота до ознайомлення із задачами на одночасний рух у різних напрямках (рух назустріч та рух у протилежних напрямках)

Актуалізація знань учнів про такі взаємопов'язані величини, як відстань, швидкість та час, здійснюється під час розв'язування простих та складених задач відомих дітям видів. Окрім цього, на поточному етапі слід повторити не лише взаємозв'язок між даними величинами, а й приділити певну увагу фізичному змісту швидкості: швидкість — це відстань, яку долає тіло за одиницю часу.

1. Поясніть зміст речень:

• равлик повзе зі швидкістю $6 \frac{\text{М}}{\text{ГОД}}$ (це означає, що равлик за кожную годину долає по 6 м);

• літак летить зі швидкістю $950 \frac{\text{КМ}}{\text{ГОД}}$ (це означає, що літак за кожную годину долає по 950 км).

2. Назвіть швидкість, з якою, на вашу думку, їде машина: $6 \frac{\text{КМ}}{\text{ГОД}}$, $80 \frac{\text{КМ}}{\text{ГОД}}$, $8 \frac{\text{КМ}}{\text{ГОД}}$.

3. Чому дорівнює швидкість руху:

• меч-риби, якщо вона за кожную годину пропливає по 100 км ($100 \frac{\text{КМ}}{\text{ГОД}}$);

• верблюда, якщо він за кожную годину проходить 25 км ($25 \frac{\text{КМ}}{\text{ГОД}}$).

4. Згадайте, як пов'язані між собою величини: відстань, швидкість та час. Складіть за кожним рядком задачу й розв'яжіть ці задачі:

	S (км)	V ($\frac{\text{км}}{\text{год}}$)	t (год)
Бджола	18	$\frac{6}{6}$?
Бабка	200	?	2
Стриж	?	100	4

5. Розв'яжіть задачу: літак за 3 год пролетів 2700 км. Яку відстань він пролетить за 6 год, якщо летітиме з такою самою швидкістю? (Це задача на знаходження четвертого пропорційного, яка розв'язується двома способами: способом наведення до одиниці, способом відношень.)

6. Слон пробігає 360 м за 30 с, а швидкість лева на $28 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ більша за швидкість слона. Яку відстань пробіжить лев за 9 с? (Це ускладнена задача на знаходження четвертого пропорційного — задача, пов'язана з одиничною нормою.)

7. Машина їхала 3 год зі швидкістю $100 \frac{\text{км}}{\text{год}}$, і 4 год зі швидкістю $120 \frac{\text{км}}{\text{год}}$. Яку відстань подолала машина? (Це задача на знаходження суми двох добутків.)

Розглянемо **допоміжні моделі до останньої задачі**. **Короткий запис складаємо, як звичайно**, у формі таблиці.

	S (км)	V (км/год)	t (год)
I	?	100	3
II	?	?	4

Окрім цього, до задачі корисно зробити креслення:

— Що означає число 100? (Число 100 означає швидкість автомобіля **спочатку**. $100 \frac{\text{км}}{\text{год}}$ означає, що автомобіль за кожну годину проїздив по 100 км.)

— Що означає число 3? (Число 3 означає час руху автомобіля **спочатку**.)

— Отже, автомобіль за першу годину подолав 100 км (покажемо це відрізком), за другу годину — 100 км, за третю годину — 100 км.

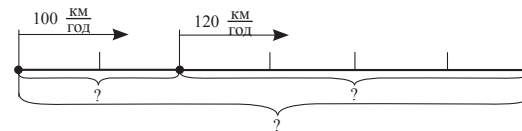
— Що означає число 120? (Число 120 означає швидкість автомобіля **наприкінці**. $120 \frac{\text{км}}{\text{год}}$ означає, що автомобіль за кожну годину проїздив по 120 км.)

— Що означає число 4? (Число 4 означає час руху автомобіля **наприкінці**.)

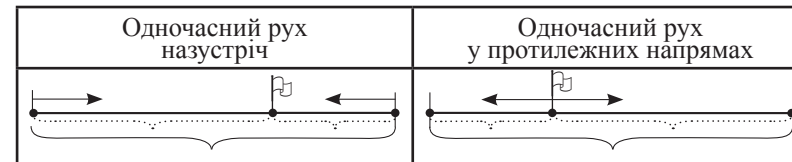
— Отже автомобіль за першу з чотирьох годин проїхав 120 км (покажемо це відрізком), за другу годину — 120 км, за третю годину — 120 км, за четверту годину — 120 км.

— Яке число є шуканим? (Шуканою є загальна відстань, яку подолав автомобіль за весь час руху.)

— Як це показати на кресленні? (Фігурною дужкою.)



На етапі підготовчої роботи також слід узагальнити й систематизувати уявлення дітей про рух назустріч та рух у протилежних напрямках. Для цього учні спостерігають за рухом одного тіла відносно іншого й навчаються схематично зображати рух.



Спостерігаючи за одночасним рухом двох тіл, учні роблять висновки про характер зміни відстані між тілами під час руху назустріч та руху в протилежних напрямках, про час руху обох тіл та про величину відстані між тілами на момент початку (закінчення) руху.

Спостереження за **одночасним рухом назустріч** дають підстави зробити такі **висновки**:

- відстань між тілами весь час зменшується;
- весь шлях складається зі шляху, подоланого першим тілом, та шляху, подоланого другим тілом;
- кожне тіло на рух витратило однаковий час, тому що вони почали рухатися одночасно й закінчили рухатися одночасно.

Спостереження за **одночасним рухом в протилежних напрямках** дають підстави зробити такі **висновки**:

- відстань між тілами весь час збільшується;
- весь шлях складається зі шляху, подоланого першим тілом, та шляху, подоланого другим тілом;
- кожне тіло на рух витратило однаковий час, тому що вони почали рухатися одночасно й закінчили рухатися одночасно.

Порівнюючи ці висновки, узагальнюємо їх.

Під час одночасного руху назустріч (в протилежних напрямках):

- 1) відстань між тілами весь час зменшується (збільшується);
- 2) весь шлях складається зі шляху, подоланого першим тілом, та шляху, подоланого другим тілом;
- 3) кожне тіло на рух витратило однаковий час, тому що вони почали рухатися одночасно й закінчили рухатися одночасно.

Після спостереження за одночасним рухом двох тіл назустріч та в протилежних напрямках для глибокого усвідомлення зроблених висновків учням пропонують завдання:

1. Із двох міст одночасно назустріч вийшли два пішоходи й зустрілися через 3 год. Скільки часу рухався кожний пішохід? (3 год.)

2. Із села в місто вийшов пішохід і в цей самий час із міста назустріч йому виїхав мотоцикліст, який зустрів пішохода через 40 хв. Скільки часу рухався до зустрічі пішохід? (40 хв.)

3. Двоє пішоходів вийшли одночасно в протилежних напрямках і закінчили свій рух через 2 год. Скільки часу рухався кожний пішохід? Що можна сказати про відстань, яку пройшов кожний пішохід, якщо:

- вони рухалися з однаковою швидкістю (відстань однакова, тому що швидкості однакові в обох пішоходів, час руху теж однаковий — 2 год);
- швидкість першого більша від швидкості другого (відстань, яку пройшов перший пішохід, більша за відстань, яку пройшов другий; при однаковому часі руху, швидкість і відстань змінюються одному напрямі: якщо більше швидкість, то більша відстань).

4. Двоє лижників вийшли одночасно назустріч один одному. Перший лижник ішов зі швидкістю $12 \frac{\text{км}}{\text{год}}$, а другий — $14 \frac{\text{км}}{\text{год}}$. Як змінюється відстань між лижниками? (Відстань при одночасному русі назустріч весь час зменшується.) На скільки зменшиться відстань за першу годину, за другу годину? ($12 \frac{\text{км}}{\text{год}}$ — це означає, що перший лижник за кожну годину проходив по 12 км; $14 \frac{\text{км}}{\text{год}}$ — означає, що другий лижник за кожну годину проходив по 14 км. Отже, за першу годину перший лижник наблизився на 12 км, а другий — на 14 км, тому всього вони наблизилися: $12 + 14 = 26$ км. За другу годину перший лижник пройшов 12 км, а другий — 14 км, тому вони за другу годину наблизилися один до одного також на: $12 + 14 = 26$ км.)

5. Двоє велосипедистів виїхали одночасно з одного пункту в протилежних напрямках. Швидкість першого велосипедиста $5 \frac{\text{м}}{\text{с}}$, а другого — $3 \frac{\text{м}}{\text{с}}$. Як змінюється відстань між велосипедистами? (Відстань при одночасному русі в протилежних напрямках весь час збільшується.)

— На скільки збільшиться відстань за першу секунду, за другу секунду? ($5 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ — це означає, що перший велосипедист за кожну секунду проїздив по 5 м; $3 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ — означає, що другий велосипедист за кожну секунду проїздив по 3 м. Отже, за першу секунду перший велосипедист віддалився на 5 м, а другий — на 3 м, тому всього вони віддалилися один від одного на: $5 + 3 = 8$ м. За другу секунду перший велосипедист проїхав 5 м, а другий — 3 м, тому вони за другу секунду віддалилися один від одного теж на: $5 + 3 = 8$ м.)

У задачах 4 та 5 слід порівняти отримані числові значення і зробити висновок. Якщо два тіла рухаються одночасно назустріч одне одному або в протилежних напрямках, то **відстань** між ними весь час **змінюється на одне й те саме число** одиниць, яке дорівнює **сумі відстаней, що долає кожне тіло за одиницю часу**.

Для закріплення зробленого висновку є корисними такі завдання:

6. Дві черепахи одночасно виринули назустріч одна одній. Швидкість першої черепахи $9 \frac{\text{дм}}{\text{хв}}$, а швидкість другої черепахи $5 \frac{\text{дм}}{\text{хв}}$. Як змінюється відстань між черепахами? На скільки дециметрів зменшується відстань між черепахами за кожну секунду?

7. Два катери відійшли від пристані одночасно в протилежних напрямках. Швидкість першого катера $25 \frac{\text{км}}{\text{год}}$, а другого — $34 \frac{\text{км}}{\text{год}}$. Як змінюється відстань між катерами? На скільки кілометрів збільшується відстань між катерами за кожну годину? Складіть обернену задачу, у якій треба знайти швидкість першого катера.

8. Двоє лижників вийшли з одного селища одночасно в протилежних напрямках. Знайдіть швидкість другого лижника, якщо відомо, що швидкість першого лижника $5 \frac{\text{км}}{\text{год}}$, і що вони віддаляються за кожну годину на 12 км.

9. Хлопчик і дівчинка почали одночасно бігти на ковзанах **назустріч один одному**. З якою швидкістю біжить дівчинка, якщо швидкість хлопчика $5 \frac{\text{м}}{\text{с}}$, і вони наближаються один до одного на 9 м за кожну секунду?

2.1.2. Ознайомлення учнів із задачами на одночасний рух назустріч та одночасний рух у протилежних напрямках

2.1.2.1. Задачі на знаходження відстані (перший спосіб розв'язання)

Задача 1 на знаходження відстані при одночасному русі назустріч

На етапі підготовки учні навчилися схематично зображати рух назустріч та в протилежних напрямках, робити висновки про зміну відстані, про час руху кожного тіла, про відстань, яку подолали тіла при русі назустріч або в протилежних напрямках. Також повторили взаємозв'язок між такими величинами, як відстань, швидкість і час. Тому можна відразу запропонувати учням задачу нового типу (на знаходження відстані при одночасному русі назустріч), і провести роботу над нею за загальним планом.

Задача 1. Двоє лижників вийшли одночасно назустріч один одному з двох селищ і зустрілися через 3 год. Перший лижник ішов зі швидкістю $12 \frac{\text{км}}{\text{год}}$, а інший — $14 \frac{\text{км}}{\text{год}}$. Яка відстань між селищами?

Розглянемо детально методику роботи над задачею.

— Про що йдеться в задачі? (*У задачі йдеться про рух двох лижників. Тому короткий запис задачі буде у формі креслення.*)

— Що відомо про час початку руху? (*Лижники почали рухатися одночасно.*)

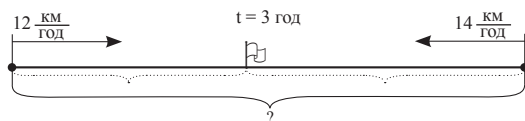
— Як рухаються лижники? (*Лижники рухаються назустріч один одному.*)

Покажемо це на кресленні стрілочками «назустріч».

— Зробіть висновки.

- Відстань між тілами весь час зменшується.
- Весь шлях складається зі шляху, подоланого першим тілом, та шляху, подоланого другим тілом.
- Кожне тіло на рух витратило однаковий час, тому що вони почали рухатися одночасно й закінчили рухатися одночасно.

— Складіть короткий запис задачі. (*Над стрілочками записуємо швидкості руху кожного лижника. Поставимо прапорець на місці зустрічі: тут слід подумати, як він розташовується відносно селищ — швидкість першого лижника менша ніж швидкість другого лижника, на рух вони витратили однаковий час, тобто 3 год. Отже, перший пройшов меншу відстань ніж другий. Прапорець слід поставити ближче до першого селища. На рух кожний лижник витратив 3 год, лижники зустрілися через 3 год. Біля прапорця напишемо $t = 3$ год. Треба знайти відстань між селищами: позначимо її фігурною дужкою. Нагадаємо, що вся відстань складається з відстані, яку пройшов перший лижник, та відстані, яку пройшов другий лижник. Покажемо це фігурними дужками.*)



— За коротким записом поясніть числа задачі. (*Число 12 позначає швидкість першого лижника. $12 \frac{\text{км}}{\text{год}}$ означає, що перший лижник за кожну годину проходив по 12 км. Число 14 означає швидкість другого лижника. $14 \frac{\text{км}}{\text{год}}$ означає, що за кожну годину другий лижник **проходив** по 14 км. Число 3 означає час, який рухався кожний лижник.*)

— Згадайте правило знаходження відстані. (*Щоб знайти відстань, треба швидкість помножити на час.*)

— Яке запитання задачі? Що можна сказати про шукану величину? Як шукана величина пов'язана з іншими величинами? (*У задачі*

запитується про відстань між селищами. Відстань між селищами дорівнює всій відстані, що пройшли разом лижники. Отже, уся відстань складається з відстані, яку пройшов перший лижник, та відстані, яку пройшов другий лижник.)

— Яке запитання задачі? (*Яка відстань між селами?*) Як ми його переформулювали? (*Яку відстань пройшли обидва лижники разом?*)

— Що варто знати, щоб відповісти на запитання задачі? (*Слід знати два числові значення: відстань, яку пройшов перший лижник, невідомо; відстань, яку пройшов другий лижник, невідомо.*)

— Якою арифметичною дією дамо відповідь на запитання задачі? (*Дією додавання.*)

— Чи можна відразу відповісти на запитання задачі? (*Не можна, тому що ми не знаємо: відстань, яку пройшов перший лижник; відстань, яку пройшов другий лижник.*)

— Що варто знати, щоб визначити відстань, яку пройшов перший лижник? (*Слід знати два числові значення: швидкість першого лижника, відомо — $12 \frac{\text{км}}{\text{год}}$; час руху першого лижника, відомо — 3 год.*)

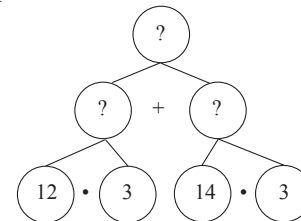
— Якою арифметичною дією дамо відповідь на це запитання? (*Дією множення.*)

— Чи можна тепер відповісти на запитання задачі? (*Не можна, тому що ми не знаємо яку відстань подолав другий лижник.*)

— Що варто знати, щоб це визначити? (*Слід знати два числові значення: швидкість другого лижника, відомо — $14 \frac{\text{км}}{\text{год}}$; час руху другого лижника, відомо — 3 год.*)

— Якою арифметичною дією дамо відповідь на це запитання? (*Дією множення.*)

— Чи можна тепер відповісти на запитання задачі? (*Так, ми від запитання задачі перейшли до числових даних. Аналіз закінчено.*)



— Складіть план розв'язування задачі. (*Першою дією визначаємо відстань, яку пройшов перший лижник. Другою дією — відстань, яку пройшов другий лижник. Третьою дією — відстань, яку пройшли разом обидва лижники, відповідаємо на запитання задачі.*)

— Запишіть розв'язання за діями з поясненням.

Розв'язання:

1) $12 \cdot 3 = 36$ (км) — відстань, яку пройшов перший лижник.

2) $14 \cdot 3 = 42$ (км) — відстань, яку пройшов другий лижник.

3) $36 + 42 = 78$ (км) — відстань, яку пройшли обидва лижники разом; відстань між селищами.

Відповідь: 78 км — відстань між селищами.

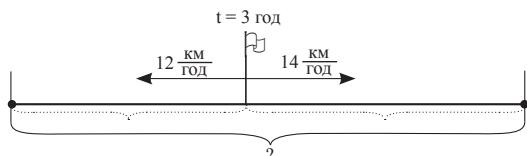
Зміна напрямку руху в задачі 1 — тіла рухаються в протилежних напрямках. Дослідження впливу цієї зміни на план розв'язання задачі

Задача на знаходження відстані при одночасному русі назустріч (с.ХХ) перетворюється в задачу на знаходження відстані при одночасному русі в різних напрямках.

— Припустимо, лижники йшли не назустріч один одному, а одночасно вирушили з одного місця та йшли в протилежних напрямках.

— Яка відстань буде між лижниками через 3 год?

— Зробіть відповідні зміни в кресленні.



— Що відомо про час початку руху? (Лижники почали рухатися одночасно.)

— Як рухаються лижники? (Лижники рухаються в протилежних напрямках.)

— Зробіть висновки:

- відстань між тілами весь час збільшується;
- весь шлях складається зі шляху, подоланого першим тілом, та шляху, подоланого другим тілом;
- кожне тіло на рух витратило однаковий час, тому що вони почали рухатися одночасно й закінчили рухатися одночасно.

— За коротким записом поясніть числа задачі.

— Яке запитання задачі? Що можна сказати про шукану величину?

Як шукана величина пов'язана з іншими величинами?

— Порівняйте цю задачу з попередньою. Чим вони відрізняються?

(У першій задачі лижники рухалися назустріч, а в цій — у протилежних напрямках.)

— Як ця зміна вплине на розв'язання задачі? Чи зміниться перша дія? Друга дія? Третя дія?

— Розкажіть план розв'язання цієї задачі.

Отже, якщо в задачі треба знайти відстань при одночасному русі назустріч або в протилежних напрямках, то її розв'язують за **планом**:

1. Першою дією визначають відстань, яку пройшло перше тіло.
2. Другою дією визначають відстань, яку пройшло друге тіло.
3. Третьою дією визначають відстань, яку пройшли обидва тіла.

Заміна числових даних швидкостей тіл буквами та дослідження впливу цієї зміни на план розв'язання задачі

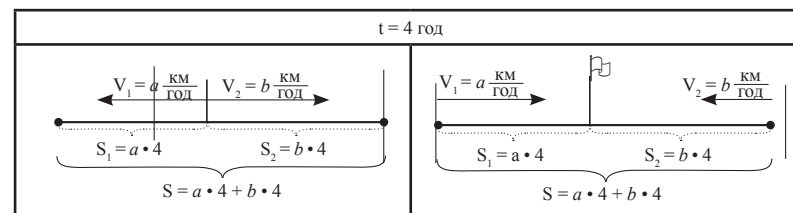
Школярам пропонують задачу, у якій значення швидкостей тіл подані буквами й шуканою є відстань, але за умов двох варіантів руху — руху назустріч та руху в протилежних напрямках.

Діти виконують креслення до кожного варіанту руху та розв'язують обидві задачі.

Задача. Пішохід іде зі швидкістю $a \frac{\text{км}}{\text{год}}$, а вершник рухається зі швидкістю $b \frac{\text{км}}{\text{год}}$. Знайдіть:

а) відстань, яка буде між ними через 4 год, якщо вони вирушили одночасно з одного міста в протилежних напрямках;

б) відстань, яка була між ними на момент початку руху, якщо вони зустрілися через 4 год.



Заміна числових значень буквами не вплинула на план розв'язання задач: першою дією знаходимо відстань, що подолало перше тіло, другою дією — відстань, що подолало друге тіло, третьою дією — відстань, яку подолали обидва тіла.

2.1.2.2. Задачі на знаходження швидкості (перший спосіб розв'язання)

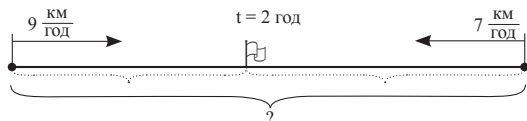
Задачу на знаходження швидкості вводимо як обернену задачу на знаходження відстані.

Задача. З двох сіл виїхали одночасно назустріч один одному трактор та бричка з конем. Трактор рухався зі швидкістю $9 \frac{\text{км}}{\text{год}}$, а швидкість брички — $7 \frac{\text{км}}{\text{год}}$. Чому дорівнює відстань між селами, якщо вони зустрілися через 2 год?

— Про що йдеться в задачі? Що відомо про час початку руху?

— Як рухаються трактор та бричка? Покажемо це на кресленні стрілочками «назустріч». Зробіть висновки.

— Складіть короткий запис задачі.



— За коротким записом поясніть числа задачі.

— Яке запитання задачі? Що можна сказати про шукану величину?

Як шукана величина пов'язана з іншими величинами?

— Яке запитання задачі? Як ми його переформулювали?

— Розкажіть план розв'язування задачі.

Розв'язання:

1) $9 \cdot 2 = 18$ (км) — відстань, яку подолав трактор; S_1 .

2) $7 \cdot 2 = 14$ (км) — відстань, яку пододала бричка; S_2 .

3) $18 + 14 = 32$ (км) — відстань, яку подолали трактор і бричка разом; відстань між селами; S .

Відповідь: 32 км — відстань між селами.

Зміна шуканого в задачі на одночасний рух назустріч, на знаходження відстані. Складання й розв'язання оберненої задачі на знаходження швидкості при одночасному русі на зустріч (задача 2). Дослідження впливу цієї зміни на розв'язання задачі

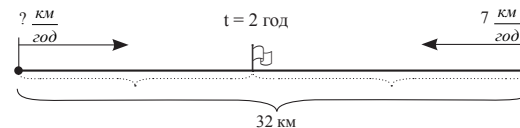
— Складіть обернену задачу так, щоб була невідома швидкість трактора. Випикуємо числа задачі й пояснюємо, що означає кожне число:

9, 7, 2, ? — пряма задача.

?, 7, 2, 32 — перша обернена задача.

Задача 2. З двох сіл, відстань між якими 32 км, одночасно назустріч один одному вирушили трактор та бричка з конем і зустрілися через 2 год. Чому дорівнює швидкість трактора, якщо швидкість брички $7 \frac{\text{км}}{\text{год}}$?

Вносимо зміни в короткий запис:



— За коротким записом поясніть числа задачі. (Число 7 позначає швидкість брички. $7 \frac{\text{км}}{\text{год}}$ означає, що бричка за кожну годину проїздила по 7 км. Число 2 означає час, який рухався трактор, і час, який рухалася бричка. Число 32 означає відстань між селами, відстань, яку подолали разом трактор і бричка.)

— Яке запитання задачі? Що можна сказати про шукану величину? Як шукана величина пов'язана з іншими величинами? (У задачі запитуються про швидкість трактора. Щоб знайти швидкість трактора, треба відстань, що подолав трактор, поділити на час його руху.)

— Що варто знати, щоб відповісти на запитання задачі? (Слід знати два числові значення: відстань, яку проїхав трактор, невідомо; час руху трактора, відомо — 2 год.)

— Якою арифметичною дією дамо відповідь на запитання задачі? (Дією ділення.)

— Чи можна відразу відповісти на запитання задачі? (Не можна, тому що ми не знаємо відстань, яку подолав трактор до зустрічі.)

— Що варто знати, щоб визначити відстань, яку подолав трактор до зустрічі? (Слід знати два числові значення: загальну відстань, яку подолали і трактор, і бричка, відомо — 32 км; відстань, яку пододала бричка, невідомо.)

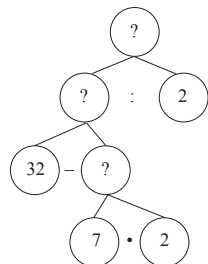
— Якою арифметичною дією дамо відповідь на це запитання? (Дією віднімання.)

— Чи можна відразу відповісти на це запитання? (Не можна, тому що ми не знаємо, яку відстань пододала бричка.)

— Що варто для цього знати? (Слід знати два числові значення: швидкість брички, відомо — $7 \frac{\text{км}}{\text{год}}$; час руху брички, відомо — 2 год.)

— Якою арифметичною дією дамо відповідь на це запитання? (Дією множення.)

— Чи можна тепер відповісти на запитання задачі? (Так, ми від запитання задачі перейшли до числових даних. Аналіз закінчено.)



— Складіть план розв’язування задачі. (Першою дією визначаємо відстань, яку пододала бричка. Другою дією — відстань, яку подолав трактор. Третьою дією — швидкість трактора й відповідаємо на запитання задачі.)

Розв’язання:

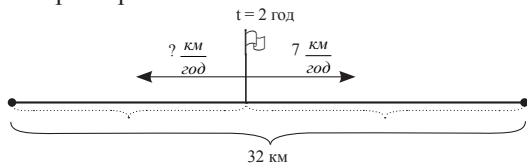
- 1) $7 \cdot 2 = 14$ (км) — відстань, яку пододала бричка; S_2 .
- 2) $32 - 14 = 18$ (км) — відстань, яку подолав трактор; S_1 .
- 3) $18 : 2 = 9$ ($\frac{\text{КМ}}{\text{ГОД}}$) — швидкість трактора; V_1 .

Відповідь: $9 \frac{\text{КМ}}{\text{ГОД}}$ — швидкість трактора.

Зміна напрямку руху в задачі 2 — тіла рухаються в протилежних напрямках. Дослідження впливу цієї зміни на план розв’язання задачі

Школярі виконують зміни в короткому записі задачі 2 (с.ХХ), пояснюють числові дані та роблять відповідні висновки; з’ясовують, чим ця задача відрізняється від попередньої та як ця зміна вплине на розв’язання задачі.

— Припустимо, трактор і бричка рухалися не назустріч один одному, а одночасно вирушили з одного селища в протилежних напрямках. Яка швидкість трактора?



— Що відомо про час початку руху? Як вони рухаються? Зробіть висновки.

— За коротким записом поясніть числа задачі.

— Яке запитання задачі? Що можна сказати про шукану величину? Як шукана величина пов’язана з іншими величинами? (У задачі запи-

тується про швидкість трактора. Щоб знайти швидкість трактора, треба відстань, яку подолав трактор, поділити на час його руху.)

— Порівняйте цю задачу з попередньою. Чим вони відрізняються? Як ця зміна вплине на розв’язання задачі? Чи потрібно її розв’язувати?

— Розкажіть план розв’язання цієї задачі.

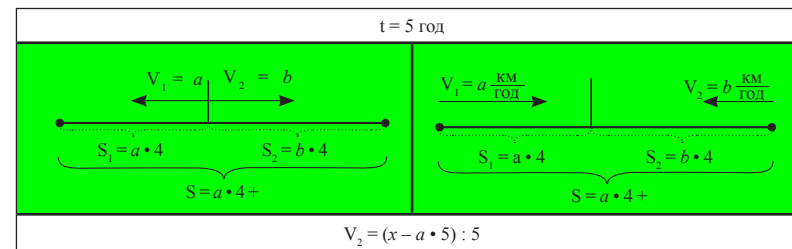
Отже, якщо в задачі треба знайти швидкість при одночасному русі назустріч або в протилежних напрямках, то її розв’язують за **планом**:

1. Першою дією визначають відстань, яку пройшло перше тіло.
2. Другою дією визначають відстань, яку пройшло друге тіло.
3. Третьою дією визначають швидкість.

Заміна числових даних швидкості одного з тіл та відстані буквами та дослідження впливу цієї зміни на план розв’язання задачі

Задача. Двоє велосипедистів вирушили одночасно. Швидкість першого велосипедиста $a \frac{\text{КМ}}{\text{ГОД}}$. Знайдіть швидкість другого велосипедиста, якщо:

- вони рухаються в протилежних напрямках і відстань через 5 год після початку руху становила x км;
- вони рухались назустріч один одному і відстань на початку руху становила x км, а зустріч відбулася через 5 год.



Заміна числових значень буквами не вплинула на план розв’язання задач: першою дією знаходимо відстань, що пододало одне тіло, другою дією — відстань, що пододало інше тіло, третьою дією — швидкість іншого тіла й відповідаємо на запитання задачі.

2.1.2.3. Узагальнення планів розв’язання задач на знаходження відстані та швидкості при одночасному русі назустріч та в протилежних напрямках. Формулювання першого способу розв’язання цих задач

— Порівняйте плани розв’язання задач на знаходження відстані та швидкості при одночасному русі назустріч та в протилежних напрямках.

Що в них спільного? (Спільні перші дві дії: першою дією знаходимо відстань, що пододало одне тіло; другою дією — відстань, що пододало інше тіло, третьою дією відповідаємо на запитання задачі.)

— Отже, якщо в задачі треба знайти відстань або швидкість при одночасному русі назустріч або в протилежних напрямках, то цю задачу розв'язують за **планом**:

1. Першою дією визначають відстань, яку пройшло перше тіло.
2. Другою дією визначають відстань, яку пройшло друге тіло.
3. Третьою дією відповідають на запитання задачі.

— Узагальнимо математичні структури цих задач (мал. 7).

Таблиця 7

Опорні схеми та план розв'язування задач на одночасний рух у різних напрямках, у яких шуканою є відстань або час (перший спосіб)

Задачі на знаходження відстані	
<p>Одночасний рух назустріч</p>	<p>Одночасний рух у протилежних напрямках</p>
Задачі на знаходження швидкості	
<p>Одночасний рух назустріч</p>	<p>Одночасний рух у протилежних напрямках</p>
<p>V_1 — швидкість першого тіла, V_2 швидкість другого тіла, t — час спільного руху, S — відстань між тілами на момент початку або на момент закінчення руху</p>	<p>$V_1 t V_2$ — швидкість першого тіла, швидкість руху другого тіла, час їх спільного руху, відстань, яку подолали обидва тіла під час спільного руху; три з них дано, а одне — шукане.</p>
<p>План розв'язання</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Першою дією визначають відстань, яку пройшло перше тіло. 2. Другою дією визначають відстань, яку пройшло друге тіло. 3. Третьою дією відповідають на запитання задачі 	

— Визначте істотні ознаки задач цього типу.

Істотні ознаки задач на одночасний рух назустріч та в протилежних напрямках:

- ідеться про спільний рух двох тіл назустріч (у протилежних напрямках);
- є чотири числові значення: швидкість руху першого тіла, швидкість руху другого тіла, час їх спільного руху, відстань, яку подолали обидва тіла під час спільного руху; три з них дано, а одне — шукане.

2.1.3. Формування вміння розв'язувати задачі на знаходження відстані та швидкості при одночасному русі назустріч та в протилежних напрямках

На цьому етапі учням пропонують різноманітні задачі, але методика роботи з ними будується за пам'яткою.

Пам'ятка (перший спосіб: S, V)

1. Про що йдеться в задачі?
2. Що відомо про час початку руху?
3. Як рухаються тіла?
4. Зробіть висновки.
 - 1) Відстань між тілами весь час збільшується (зменшується).
 - 2) Весь шлях складається зі шляху, подоланого першим тілом, та шляху, подоланого другим тілом.
 - 3) Кожне тіло на рух витратило однаковий час, тому що вони почали й закінчили рухатися одночасно.
5. Складіть короткий запис задачі.
6. За коротким записом поясніть числа задачі.
7. Складіть план розв'язування задачі:
 - Першою дією визначають відстань, яку пройшло перше тіло.
 - Другою дією — відстань, яку пройшло друге тіло.
 - Третьою дією відповідають на запитання задачі.
8. Запишіть розв'язання за діями з поясненням або виразом.
9. Запишіть відповідь до задачі.
10. Складіть і розв'яжіть обернену задачу (на знаходження відстані або швидкості) або перетворіть задачу в задачу на рух назустріч (рух протилежних напрямках).

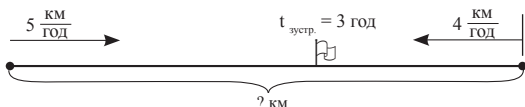
2.1.4. Ознайомлення з другим способом розв'язання задач на знаходження відстані або швидкості

2.1.4.1. Задачі на знаходження відстані при одночасному русі назустріч

Учням пропонують розв'язати задачу на знаходження відстані при одночасному русі назустріч відомим способом.

Задача 3. З двох селищ одночасно назустріч один одному вирушили хлопчик і дівчинка. Швидкість хлопчика — $5 \frac{\text{км}}{\text{год}}$, а швидкість дівчинки — $4 \frac{\text{км}}{\text{год}}$. Яка відстань між селищами, якщо вони зустрілися через 3 год після початку руху?

Працюємо над задачею за пам'яткою.



Розв'язання:

- $5 \cdot 3 = 15$ (км) — відстань, яку подолав хлопчик; S_1 ;
- $4 \cdot 3 = 12$ (км) — відстань, яку пододала дівчинка; S_2 ;
- $15 + 12 = 27$ (км) — відстань, яку подолали разом хлопчик і дівчинка; S .

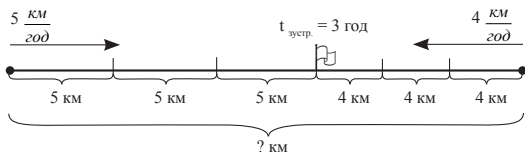
Відповідь: 27 км — відстань між селищами.

Робота над задачею після її розв'язання полягає в розв'язанні цієї задачі другим способом. Пропозиція вчителя розв'язати задачу другим способом викликає здивування в учнів і активізує пізнавальну активність. Створюється проблемна ситуація.

— Як змінюється відстань при одночасному русі назустріч? (Відстань між хлопчиком і дівчинкою весь час скорочується.)

— На скільки скоротилася відстань між дітьми за кожну годину? Чому? (Швидкість хлопчика — $5 \frac{\text{км}}{\text{год}}$, тому за кожну годину він наближається до дівчинки на 5 км. Швидкість дівчинки — $4 \frac{\text{км}}{\text{год}}$, тому вона наближається до хлопчика за кожну годину на 4 км. Отже, вони наближаються один до одного за кожну годину на: $5 + 4 = 9$ км.)

— Скільки годин вони наближалися один до одного, доки не зустрілися? (3 год.)



— Скільки разів вони наближалися на 9 км? (Тричі.) На скільки кілометрів вони наближаться за 3 год? ($9 \cdot 3 = 27$ км.)

— Як інакше розв'язати задачу? Розкажіть план розв'язування задачі. (Першою дією визначаємо на скільки кілометрів наближаються діти за кожну годину. Другою дією — на скільки кілометрів наближаться діти за 3 год, тобто дізнаємося про відстань, яку подолали діти разом — відстань між селами.)

Розв'язання:

1) $5 + 4 = 9$ (км) — на стільки наближаються діти одне до одного за кожну годину;

2) $9 \cdot 3 = 27$ (км) — на стільки наближаться діти одне до одного за 3 год.

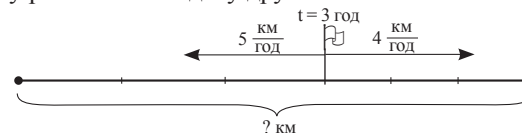
Відповідь: 27 км — відстань між селищами.

Зміна напрямку руху — тіла рухаються в протилежних напрямках. Дослідження впливу цієї зміни на другий спосіб розв'язання

Далі учням пропонують перетворити попередню задачу (с. XX) на задачу на одночасний рух в протилежних напрямках і розв'язати її двома способами.

Задача 4. З одного селища одночасно в протилежних напрямках вирушили хлопчик і дівчинка. Швидкість хлопчика — $5 \frac{\text{км}}{\text{год}}$, а швидкість дівчинки — $4 \frac{\text{км}}{\text{год}}$. Яка відстань буде між дітьми через 3 год після початку руху?

Спочатку розв'яжемо задачу другим способом:



— За коротким записом поясніть числа задачі.

— Яке запитання задачі? Як можна його переформулювати? (Запитання: «Яка відстань між дітьми буде через 3 год» можна переформулювати так: «На скільки збільшиться відстань між дітьми через 3 год?»)

— Що варто знати, щоб відповісти на запитання задачі? (Слід знати два числові значення: на скільки кілометрів збільшується відстань між дітьми за кожну годину, невідомо; час руху дітей, відомо — 3 год.)

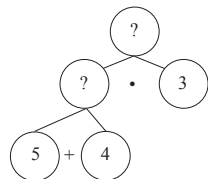
— Якою арифметичною дією дамо відповідь на запитання задачі? (Дією множення.)

— Чи можна відразу відповісти на запитання задачі? (Не можна, тому що ми не знаємо на скільки збільшується відстань між дітьми за кожну годину.)

— Що варто для цього знати? (Слід знати два числові значення: відстань, яку проходить хлопчик за кожну годину, відомо — 5 км; відстань, яку проходить дівчинка за кожну годину, відомо — 4 км.)

— Якою арифметичною дією дамо відповідь на це запитання? (Дією додавання.)

— Чи можна відразу відповісти на це запитання? (Так, ми від запитання задачі перейшли до числових даних. Аналіз закінчено.)



— Складіть план розв'язування задачі. (Першою дією визначаємо на скільки кілометрів збільшується відстань між дітьми за кожну годину. Другою дією — на скільки збільшиться відстань між дітьми за 3 год і даємо відповідь на запитання задачі.)

Розв'язання:

1) $5 + 4 = 9$ (км) — на стільки збільшується відстань між дітьми за кожну годину;

2) $9 \cdot 3 = 27$ (км) — на стільки збільшиться відстань між дітьми за 3 год.

— Порівняйте другі способи розв'язання задач на зустрічний рух і рух у протилежних напрямках. Що цікавого ви помітили? (У них майже однакові розв'язання: однакові дії, але різні пояснення — у першій задачі діти наближуються, а в другій — віддаляються.)

— Розв'яжіть цю задачу першим способом:

Розв'язання:

1) $5 \cdot 3 = 15$ (км) — відстань, яку подолав хлопчик; S_1 ;

2) $4 \cdot 3 = 12$ (км) — відстань, яку пододала дівчинка; S_2 ;

3) $15 + 12 = 27$ (км) — відстань, яку подолали разом хлопчик і дівчинка; S .

Відповідь: 27 км відстань між селищами.

— Порівняйте перші способи розв'язання задач на зустрічний рух і рух у протилежних напрямках. Що цікавого ви помітили? (У них однакові розв'язання.)

— Порівняйте розв'язання цієї задачі першим та другим способом. Чим вони відрізняються? (Першим способом ми розв'язали задачу трьома діями, а другий спосіб містить лише дві дії.)

— Порівняйте плани розв'язання цих задач.

Плани розв'язання задач на одночасний рух у різних напрямках на знаходження відстані

Перший спосіб	Другий спосіб
1. Першою дією визначають відстань, яку пройшло перше тіло.	1. Першою дією визначають, на скільки змінюється відстань за одиницю часу.
2. Другою дією визначають відстань, яку пройшло друге тіло.	2. Другою дією визначають, на скільки змінилася відстань за весь час руху
3. Третьою дією визначають усю відстань	

Під час першого способу розв'язання розглядаємо спочатку окремо рух першого тіла та окремо рух другого тіла. І лише після цього знаходимо, яку відстань обидва тіла подолали разом. При другому способі розв'язання розглядаємо рух двох тіл одне відносно одного: спочатку знаходимо, на скільки змінюється відстань за одиницю часу, а потім — як змінилися відстань за весь час руху.

Заміна числових даних швидкості одного з тіл і відстані буквами та дослідження впливу цієї зміни на план розв'язання задачі

Задача. Вантажна машина їде зі швидкістю $a \frac{\text{км}}{\text{год}}$, а легкова машина зі швидкістю $b \frac{\text{км}}{\text{год}}$. Знайдіть:

а) відстань, яка буде між ними через 7 год, якщо вони вирушили одночасно з одного міста в протилежних напрямках;

б) відстань, яка була між ними на момент початку руху, якщо вони зустрілися через 7 год.

Перший спосіб	Другий спосіб
$t = 7$ год	
$S = a \cdot 7 + b \cdot 7$	$S = (a + b) \cdot 7$

2.1.4.2. Задачі на знаходження швидкості при одночасному русі на зустріч

Зміна шуканого в задачі на знаходження відстані.

Складання й розв'язання оберненої задачі на знаходження швидкості при одночасному русі назустріч

Далі можна скласти обернену задачу до задачі 4 (с. XX) на знаходження швидкості.

5, 4, 3, ? — пряма задача;
 ?, 4, 3, 27 — перша обернена задача.

Задача 5. З одного селища одночасно в протилежних напрямках вирушили хлопчик і дівчинка. Через 3 год відстань між ними становила 27 км. Яка швидкість хлопчика, якщо швидкість дівчинки $4 \frac{\text{км}}{\text{год}}$?

Учні розв'язують цю задачу першим способом за пам'яткою.

Розв'язання:

- 1) $4 \cdot 3 = 12$ (км) — відстань, яку пододала дівчинка; S_2 .
- 2) $27 - 12 = 15$ (км) — відстань, яку подолав хлопчик; S_1 .
- 3) $15 : 3 = 5$ ($\frac{\text{км}}{\text{год}}$) — швидкість хлопчика; V_1 .

Далі вчитель звертає увагу на те, що при цьому способі розв'язання розглядали рух дівчинки і хлопчика окремо один від одного. Проте існує інший спосіб розв'язання, коли розглядається рух двох тіл одне відносно одного. При розв'язанні задачі другим способом нас цікавить зміна відстані між тілами за одиницю часу.

— На скільки кілометрів віддалялися діти одне від одного за 3 год?
 (На 27 км.)

— На скільки кілометрів віддалялися діти одне від одного за 1 год?
 (На $27 : 3 = 9$ км.)

— Скільки кілометрів із цих 9 км проходила дівчинка? (Дівчинка проходила за кожну годину 4 км.)

— Скільки кілометрів із цих 9 км проходив хлопчик? ($9 - 4 = 5$ км.)

— Отже, хлопчик за кожну годину проходив по 5 км. Чому дорівнює швидкість хлопчика? ($5 \frac{\text{км}}{\text{год}}$.)

— Розкажіть план розв'язування цієї задачі. (Першою дією визначаємо, на скільки кілометрів віддалялися діти за 1 год. Другою дією — скільки кілометрів проходив за кожну годину хлопчик, тобто дізнаємось швидкість хлопчика.)

— Запишіть розв'язання задачі за діями з поясненням.

Розв'язання:

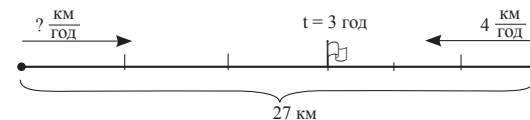
- 1) $27 : 3 = 9$ (км) — на стільки віддалялися діти за кожну годину.
- 2) $9 - 4 = 5$ (км) проходив хлопчик за кожну годину, тому швидкість хлопчика $5 \frac{\text{км}}{\text{год}}$.

Відповідь: $5 \frac{\text{км}}{\text{год}}$ швидкість хлопчика.

Зміна напрямку руху в задачі — тіла рухаються назустріч одне одному. Дослідження цієї зміни на розв'язання задачі

— Звернемося до попередньої задачі 5 (с. XX). Припустимо, що хлопчик і дівчинка йшли назустріч один одному.

Задача. З двох селищ, відстань між якими 27 км, одночасно назустріч один одному вирушили хлопчик і дівчинка і зустрілися через 3 год. Яка швидкість хлопчика, якщо швидкість дівчинки $4 \frac{\text{км}}{\text{год}}$?



— Як ця зміна вплине на розв'язання задачі? Розкажіть план розв'язання цієї задачі. (Першою дією визначаємо, на скільки кілометрів зменшується відстань між дітьми за кожну годину. Другою дією — скільки кілометрів проходив хлопчик за кожну годину й дамо відповідь на запитання задачі.)

Розв'язання:

1) $27 : 3 = 9$ (км) — на стільки зменшується відстань між дітьми за кожну годину.

2) $9 - 4 = 5$ (км) — стільки кілометрів проходив хлопчик за кожну годину, тому швидкість хлопчика $5 \frac{\text{км}}{\text{год}}$.

Відповідь: $5 \frac{\text{км}}{\text{год}}$ швидкість хлопчика.

— Порівняйте другі способи розв'язання задач на знаходження швидкості на зустрічний рух і рух у протилежних напрямках. Що цікавого ви помітили? (У них майже однакові розв'язання: однакові дії, але різні пояснення — у першій задачі діти віддаляються, а в другій — наближуються.)

— Розв'яжіть цю задачу першим способом:

Розв'язання:

- 1) $4 \cdot 3 = 12$ (км) — відстань, яку пододала дівчинка; S_2 .
- 2) $27 - 12 = 15$ (км) — відстань, яку подолав хлопчик; S_1 .
- 3) $15 : 3 = 5$ ($\frac{\text{км}}{\text{год}}$) — швидкість хлопчика; V_1 .

Відповідь: $5 \frac{\text{км}}{\text{год}}$ швидкість хлопчика.

— Порівняйте перші способи розв'язання задач на зустрічний рух і рух у протилежних напрямках. Що цікавого ви помітили? (У них однакові розв'язання.)

- Запишіть відповідь до задачі.
- Порівняйте розв’язання цієї задачі першим та другим способом. Чим вони відрізняються? (*Першим способом ми розв’язали задачу трьома діями, а другий спосіб містить лише дві дії.*)
- Порівняйте плани розв’язання задач.

План розв’язання задач на знаходження швидкості при одночасному русі в різних напрямках

Перший спосіб	Другий спосіб
1. Першою дією визначають відстань, яку пройшло перше тіло.	1. Першою дією визначають, на скільки змінюється відстань за одиницю часу.
2. Другою дією визначають відстань, яку пройшло друге тіло.	2. Другою дією визначають, яку відстань проходить тіло за одиницю часу, тобто дізнаються швидкість його руху
3. Третьою дією визначають швидкість	

При *першому способі* розв’язання ми розглядаємо спочатку окремо рух першого тіла та окремо рух другого тіла. І лише після цього знаходимо шукану швидкість.

При *другому способі* розв’язання розглядаємо рух двох тіл одне відносно одного: спочатку знаходимо, на скільки змінюється відстань за одиницю часу, а потім — скільки кілометрів проходить тіло за одиницю часу, робимо висновок про швидкість його руху.

Заміна числових даних швидкості одного з тіл і відстані буквами та дослідження впливу цієї зміни на план розв’язання задачі

Задача. Вершник і велосипедист вирушили одночасно. Знайдіть швидкість вершника, якщо швидкість велосипедиста $b \frac{\text{км}}{\text{год}}$, і:

- а) якщо вони вирушили одночасно з одного міста в протилежних напрямках та через 5 год відстань між ними становила s км;
- б) якщо вони вирушили одночасно назустріч один одному з двох пунктів, відстань між якими s км і зустрілися через 5 год.

Перший спосіб	Другий спосіб
$t = 5$ год	
$V = (c - b \cdot 5) : 5$	$V = c : 5 - b$

Математичні моделі першого та другого способів розв’язання цих задач зовсім однакові; заміна числових значень буквами не вплинула на розв’язання задач обома способами. Отже, напрямок руху (назустріч або в протилежних напрямках) не впливає на математичну модель задачі.

2.1.4.3. Узагальнення планів розв’язання задач на знаходження відстані та швидкості при одночасному русі назустріч та в протилежних напрямках. Формулювання другого способу розв’язання цих задач.

Порівнявши плани розв’язання задач на знаходження відстані та швидкості при одночасному русі назустріч або в протилежних напрямках робимо **узагальнювальний** висновок: якщо в задачі треба знайти відстань або швидкість при одночасному русі назустріч або в протилежних напрямках, то цю задачу розв’язують двома способами (*табл. 8*). **Таблиця 8**

Опорні схеми та плани розв’язування задач на одночасний рух у різних напрямках двома способами

Задачі на знаходження відстані	
Одночасний рух назустріч	Одночасний рух у протилежних напрямках
Задачі на знаходження швидкості	
Одночасний рух назустріч	Одночасний рух у протилежних напрямках
V_1 — швидкість першого тіла, V_2 — швидкість другого тіла,	t — час спільного руху, S — відстань між тілами на момент початку або на момент закінчення руху
План розв’язання	
Перший спосіб 1) знаходимо відстань, яку пройшло одне тіло; 2) знаходимо відстань, яку пододало інше тіло; 3) відповідаємо на запитання задачі	Другий спосіб 1) знаходимо, на скільки змінюється відстань за одиницю часу; 2) відповідаємо на запитання задачі

2.1.5. Формування вміння розв'язувати задачі на знаходження відстані та швидкості при одночасному русі назустріч та в протилежних напрямках двома способами

На цьому етапі учням пропонують різноманітні задачі на знаходження відстані та швидкості. Методика роботи над цими задачами складається за пам'ятками для розв'язання задач першим та другим способами.

Пам'ятка (другий спосіб)

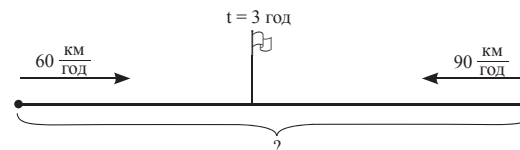
1. Про що йдеться в задачі?
2. Що відомо про час початку руху?
3. Як рухаються тіла?
4. Зробіть висновки.
 - 1) Відстань між тілами весь час збільшується (або зменшується).
 - 2) Весь шлях складається зі шляху, подоланого першим тілом, та шляху, подоланого другим тілом.
 - 3) Кожне тіло на рух витратило однаковий час, тому що вони почали й закінчили рухатися одночасно.
5. Складіть короткий запис задачі.
6. За коротким записом поясніть числа задачі.
7. Складіть план розв'язування задачі:
 - Першою дією визначають, на скільки збільшується або зменшується відстань між тілами за кожну годину.
 - Другою дією відповідають на запитання задачі.
8. Запишіть розв'язання за діями з поясненням або виразом.
9. Запишіть відповідь до задачі.
10. Розв'яжіть задачу першим способом або складіть і розв'яжіть обернену задачу (на знаходження відстані або швидкості) чи перетворіть задачу в задачу на рух назустріч (на рух у протилежних напрямках).

Варто звернути увагу учнів на те, що кожну задачу можна розв'язати двома діями. Першою дією знаходимо, на скільки змінюється відстань між тілами за одиницю часу, але в задачі на знаходження відстані ми це визначаємо дією додавання, а в задачі на знаходження швидкості — дією ділення.

2.1.6. Ознайомлення із задачами на знаходження часу

Задачі на знаходження часу при одночасному русі назустріч або в протилежних напрямках вводимо як обернені задачі до задач на знаходження відстані.

Задача. З Києва та Одеси одночасно назустріч один одному відправилися два автобуси. Швидкість першого автобуса — $60 \frac{\text{км}}{\text{год}}$, швидкість другого автобуса — $90 \frac{\text{км}}{\text{год}}$. Яка відстань між містами, якщо автобуси зустрілися через 3 год після початку руху?



Розв'язання:

- 1) $60 + 90 = 150$ (км) — на стільки скорочується відстань між автобусами за кожну годину;
- 2) $150 \cdot 3 = 450$ (км) — на стільки скоротиться відстань між автобусами за 3 год, а отже, 450 км — відстань між містами;

Відповідь: 450 км — відстань між Одесою та Києвом.

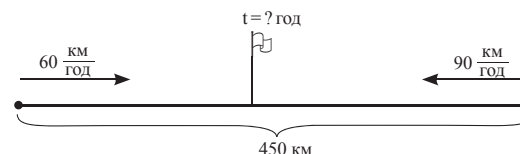
Зміна шуканого в задачі на знаходження відстані при одночасному русі назустріч шляхом складання й розв'язання оберненої задачі на знаходження часу (задача б). Дослідження пливку цієї зміни на розв'язання задачі

Працюючи над задачею (с.ХХ) після її розв'язання діти складають обернену задачу на знаходження часу:

- $60, 90, 3, ?$ — пряма задача;
 $60, 90, ?, 450$ — обернена задача.

Задача б. З Києва та Одеси одночасно назустріч один одному відправилися два автобуси. Швидкість першого автобуса — $60 \frac{\text{км}}{\text{год}}$, швидкість другого автобуса — $90 \frac{\text{км}}{\text{год}}$. Через скільки годин вони зустрінуться, якщо відстань між містами 450 км?

Вносимо зміни в креслення:



— На скільки скорочується відстань між автобусами за кожну годину? (На $60 + 90 = 150$ км.)

— На скільки має скоротитися відстань між автобусами за весь час руху? (На 450 км.)

— Усього відстань між автобусами має скоротитися на 450 км, а за кожну годину вона скорочується на 150 км. Що можна сказати про

час зустрічі автобусів? (Скільки разів у 450 км міститься по 150 км, стільки й годин рухалися до зустрічі автобуси.)

— Розкажіть план розв'язання. (Першою дією визначаємо, на скільки кілометрів скорочується відстань між автобусами за кожну годину. Другою дією — скільки разів у загальній відстані міститься по цьому числу кілометрів, зробимо висновок про час руху автобусів до зустрічі.)

Розв'язання:

1) $90 + 60 = 150$ (км) — на стільки скорочується відстань між автобусами за кожну годину;

2) $450 : 150 = 3$ — стільки годин рухалися до зустрічі автобуси.

Відповідь: через 3 год автобуси зустрілися.

— Порівняйте план розв'язування задачі на знаходження відстані та план розв'язування оберненої задачі на знаходження часу. Що в них спільного? (В обох задачах ми розглядали рух двох автобусів один відносно одного. Тобто першою дією визначали, на скільки змінюється відстань між автобусами за кожну годину — ми працювали за другою пам'яткою.)

Варто повідомити учням, що задачі на знаходження часу розв'язуються лише одним способом — коли розглядаємо рух двох тіл одне відносно одного.

Зміна напрямку руху задачі 6 — тіла рухаються в протилежних напрямках. Дослідження впливу цієї зміни на розв'язання задачі

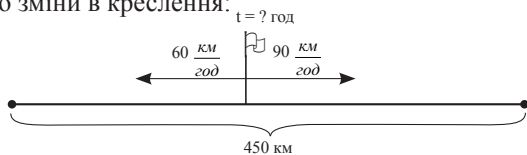
За умовою попередньої задачі тіла зустрілися, продовжимо цю задачу — припустимо тіла продовжили рух, але в протилежних напрямках.

— Припустимо, що автобуси зустрілися в селищі Любашовці. Розглянемо рух цих автобусів з цієї миті. Як вони тепер рухаються? (У протилежних напрямках.)

— Внесіть зміни в короткий запис. Змініть формулювання задачі.

Задача. З Любашовки одночасно в протилежних напрямках відправилися два автобуси. Швидкість першого автобуса — $60 \frac{\text{км}}{\text{год}}$, швидкість другого автобуса — $90 \frac{\text{км}}{\text{год}}$. Через скільки годин відстань між ними буде 450 км?

Вносимо зміни в креслення:



Треба знайти час руху автобусів. Вони рухалися стільки годин, скільки разів у 450 км міститься по числу кілометрів, на яке вони віддалялися за кожну годину.

— Чим відрізняються ці задачі? Як ця зміна вплине на розв'язання задачі? (Змінюється напрямок руху, тому й характер зміни відстані за одиницю часу, але «ключ» до розв'язання задачі лишається той самий.)

— Складіть план розв'язування задачі. (Першою дією визначаємо, на скільки збільшується відстань між поїздами за кожну годину. Другою дією — скільки разів у загальній відстані міститься по числу кілометрів, на яке збільшується відстань між автобусами за кожну годину, зробимо висновок про час руху.)

Розв'язання:

1) $90 + 60 = 150$ (км) — на стільки збільшується відстань між автобусами за кожну годину;

2) $450 : 150 = 3$ — стільки годин.

Відповідь: через 3 год відстань між автобусами буде 450 км.

Узагальнимо план розв'язування задачі на знаходження часу на односторонній рух назустріч і одночасний рух в протилежних напрямках:

1. Першою дією визначають, на скільки збільшується або зменшується відстань між тілами за кожну годину.

2. Другою дією — скільки разів у загальній відстані міститься по числу кілометрів, на яке змінюється відстань між тілами за кожну годину, роблять висновок про час руху.

Заміна числових даних швидкостей тіл і відстані буквами та дослідження впливу цієї зміни на план розв'язання задачі

Задача. Двоє пішоходів вирушили одночасно. Швидкість першого а $\frac{\text{км}}{\text{год}}$, а швидкість другого б $\frac{\text{км}}{\text{год}}$. Знайдіть час руху пішоходів, якщо: вони вирушили з одного міста в протилежних напрямках і віддалилися один від одного на с км; вони вирушили назустріч один одному з двох пунктів, відстань між якими — с км.

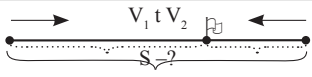
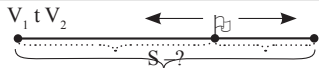
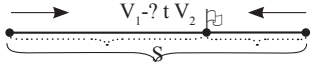
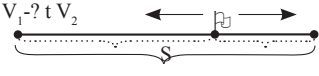
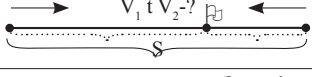
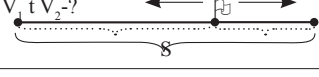
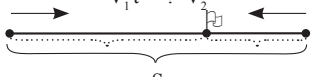
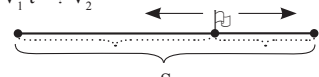
Перший спосіб	Другий спосіб
$t = ?$ год	
	$t = c : (a + b)$

Отже, задачі на знаходження часу руху при одночасному русі назустріч або в протилежних напрямках розв'язують лише одним способом. Запропоновану пам'ятку для знаходження відстані та швидкості (другим способом) можна узагальнити і для знаходження часу.

Варто звернути увагу учнів на те, що кожну задачу можна розв'язати двома діями. Першою дією знаходимо, на скільки змінюється відстань між тілами за одиницю часу, але в задачі на знаходження відстані й часу ми це визначаємо дією додавання, а в задачі на знаходження швидкості — дією ділення (табл. 9.).

Таблиця 8

Опорні схеми та плани розв'язування задач на одночасний рух у різних напрямках двома способами

Задачі на знаходження відстані	
Одночасний рух назустріч 	Одночасний рух у протилежних напрямках 
Задачі на знаходження швидкості	
Одночасний рух назустріч 	Одночасний рух у протилежних напрямках 
	
Задачі на знаходження часу	
Одночасний рух назустріч 	Одночасний рух у протилежних напрямках 
V_1 — швидкість першого тіла, V_2 — швидкість другого тіла,	t — час спільного руху, S — відстань між тілами на момент початку або на момент закінчення руху
План розв'язання	
Перший спосіб 1) знаходимо відстань, яку пройшло одне тіло; 2) знаходимо відстань, яку пододало інше тіло; 3) відповідаємо на запитання задачі	Другий спосіб 1) знаходимо, на скільки змінюється відстань за одиницю часу; 2) відповідаємо на запитання задачі

2.1.7. Формування вміння розв'язувати задачі на одночасний рух у різних напрямках двома способами

Під час формування вміння розв'язувати задачі на одночасний рух назустріч або в протилежних напрямках працюємо над задачами за пам'ятками й розв'язуємо задачі на знаходження відстані та швидкості двома способами, часу — одним способом, складаємо обернені задачі.

Задача. Від однієї пристані одночасно в протилежних напрямках вирушили два катери. Через 3 год відстань між ними становила 168 км. Знайдіть швидкість другого катера, якщо швидкість першого становить $25 \frac{\text{км}}{\text{год}}$.

25, ?, 3, 168 — пряма задача.

?, 31, 3, 168 — перша обернена задача.

25, 31, ?, 168 — друга обернена задача.

25, 31, 3, ? — третя обернена задача.

До задач ставимо творчі запитання, наприклад: «Чи могли тіла зустрітися на середині шляху? За яких умов? Якщо тіла після зустрічі продовжать свій рух, то яке тіло приїде в кінцевий пункт раніше?»

1. Равлик і черепаха вирушили одночасно назустріч один одному. Равлик поїде зі швидкістю $6 \frac{\text{м}}{\text{год}}$, а черепаха — $180 \frac{\text{м}}{\text{год}}$. Вони зустрілися через 4 год. Яка відстань була між равликом і черепахою на момент початку руху.

Зазначимо, що з метою ускладнення задачі можна запропонувати учням швидкість черепахи не в метрах за годину, а в метрах за хвилину — $3 \frac{\text{м}}{\text{год}}$.

2. Відстань між шпаком та бджолою 6000 м. Шпак і бджола почали рухатися одночасно назустріч один одному. Швидкість бджоли — $420 \frac{\text{м}}{\text{хв}}$, а швидкість шпака — $1000 \frac{\text{м}}{\text{хв}}$. Чи зустрінуться вони через 4 год? Якщо ні, то скільки метрів їм залишиться подолати до зустрічі?

Щоб ускладнити цю задачу, можна запропонувати швидкість шпака в інших одиницях вимірювання, наприклад — $60 \frac{\text{км}}{\text{год}}$.

Розв'язання	
Перший спосіб 1) $420 \cdot 4 = 1680$ (м) — відстань, яку пролетіла бджола за 4 год; 2) $1000 \cdot 4 = 4000$ (м) — відстань, яку пролетів шпак за 4 год; 3) $1680 + 4000 = 5680$ (м) — відстань, яку подоли разом бджола і шпак за 4 год; 4) $6000 - 5680 = 320$ (м) — залишилося подолати їм до зустрічі	Другий спосіб 1) $420 + 1000 = 1420$ (м) — на стільки скорочується відстань між шпаком і бджолою за кожну хвилину; 2) $1420 \cdot 4 = 5680$ (м) — на стільки скоротиться відстань між шпаком і бджолою за 4 год; 3) $6000 - 5680 = 320$ (м) — залишилося подолати їм до зустрічі
Відповідь: через 4 год шпак і бджола не зустрінуться, до зустрічі їм залишилося 320 м.	

Задля ускладнення задач на цьому етапі навчання застосовують такі **прийоми**:

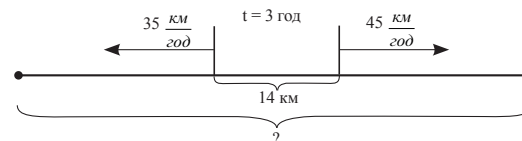
- значення швидкостей пропонують у різних одиницях вимірювання;
- потрібно визначити, яка відстань буде між тілами через певний час при одночасному русі назустріч, через який час вони зустрінуться;
- у задачах на знаходження відстані й часу значення швидкості одного з тіл не дано, але дано **різнице** **в**ідношення між швидкостями обох тіл;
- одночасний рух у протилежних напрямках починається не з одного, а з різних пунктів;
- не дано час спільного руху, а сказано, о котрій годині розпочався й закінчився рух;
- рух тіл розпочинається не одночасно.

3. Два поїзди вийшли одночасно назустріч один одному з двох міст, відстань між якими 592 км. Швидкість першого поїзду — $63 \frac{\text{км}}{\text{год}}$, а швидкість другого поїзду — $85 \frac{\text{км}}{\text{год}}$. Яка відстань буде між ними через 3 год після початку руху. Через скільки годин вони зустрінуться?

Розв'язання	Розв'язання
<p>Перший спосіб</p> <p>1) $63 \cdot 3 = 189$ (км) — відстань, яку подолав перший поїзд за 3 год;</p> <p>2) $85 \cdot 3 = 255$ (км) — відстань, яку подолав другий поїзд за 3 год;</p> <p>3) $189 + 255 = 444$ (км) — відстань, яку подолали разом обидва поїзди за 3 год;</p> <p>4) $592 - 444 = 148$ (км) — відстань між поїздами через 3 год;</p> <p>5) $63 + 85 = 148$ (км) — на стільки наближуються поїзди один до одного за кожну годину;</p> <p>6) $148 : 148 = 1$ (год) — стільки годин їм залишилося ще рухатися.</p> <p>7) $3 + 1 = 4$ (год) — через стільки годин відбудеться зустріч</p>	<p>Другий спосіб</p> <p>1) $63 + 85 = 148$ (км) — на стільки наближуються поїзди за кожну годину;</p> <p>2) $148 \cdot 3 = 444$ (км) — на стільки наближаться поїзди за 3 год;</p> <p>3) $592 - 444 = 148$ (км) — відстань між поїздами через 3 год;</p> <p>4) $592 : 148 = 4$ (год) — через стільки годин поїзди зустрінуться</p>
<p>Відповідь: через 3 год відстань між поїздами становитиме 148 км; через 4 год поїзди зустрінуться</p>	

4. Колобок котиться назустріч Лисиці. Зараз між ними 900 м. Швидкість Колобка — $70 \frac{\text{м}}{\text{хв}}$, а швидкість Лисиці — на $10 \frac{\text{м}}{\text{хв}}$ більша ніж швидкість Колобка. Яка відстань буде між ними через 2 хв? Через скільки хвилин вони зустрінуться?

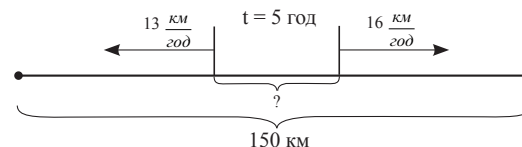
5. Від двох пристаней, відстань між якими 14 км, одночасно в протилежних напрямках вирушили моторний човен і катер. Швидкість моторного човна — $35 \frac{\text{км}}{\text{год}}$, а швидкість катера — $45 \frac{\text{км}}{\text{год}}$. Яка відстань буде між ними через 3 год після початку руху?



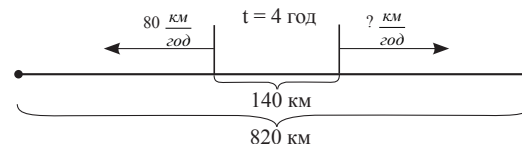
Цю задачу треба привести відповідно до виду типової задачі на одночасний рух у різних напрямках на знаходження відстані. Для цього слід розв'язати задачу, не беручи до уваги початкову відстань між тілами, а на кінцевому етапі **до знайденої відстані, яку подолали обидва катери до відстані, на яку вони віддалилися один від одного за 3 год**, додати ту відстань, що була на момент початку руху.

Якщо розв'язувати обернені задачі до цієї, то щоб привести цю задачу відповідно до типової, слід спочатку від загальної відстані відняти відстань, що була на момент початку руху, і розв'язувати задачу, використовуючи отримане значення відстані.

7. З двох пунктів одночасно в протилежних напрямках виїхали двоє велосипедистів. Швидкість першого велосипедиста — $13 \frac{\text{км}}{\text{год}}$, а швидкість другого — $16 \frac{\text{км}}{\text{год}}$. Через 5 год відстань між ними становила 150 км. Знайдіть відстань між пунктами.



8. З двох міст, відстань між якими 140 км, одночасно в протилежних напрямках виїхали дві машини. Швидкість першої машини — $80 \frac{\text{км}}{\text{год}}$. Знайдіть швидкість другої машини, якщо через 4 год відстань між ними становила 820 км.



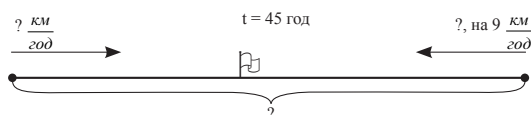
Щоб привести цю задачу відповідно до типової, слід від загальної відстані (820 км) відняти відстань, що була між тілами на момент початку руху (140 км); одержимо 680 км — відстань яку подолали обидва тіла, рухаючись одночасно в протилежних напрямках, або відстань, на яку віддалилися тіла за 4 год.

9. З двох селищ, відстань між якими 5 км, одночасно в протилежних напрямках вирушили два пішоходи. Перший ішов зі швидкістю $4 \frac{\text{км}}{\text{год}}$ а другий — зі швидкістю $5 \frac{\text{км}}{\text{год}}$. Через скільки годин відстань між ними становитиме 32 км?

10. Від Москви до Ташкента одночасно назустріч один одному вирушили два поїзди. Ташкентський поїзд у середньому за 4 год проходить 132 км. Швидкість московського поїзду на $9 \frac{\text{км}}{\text{год}}$ більша за швидкість ташкентського поїзду. Поїзди зустрілися через 45 год. Знайдіть відстань між Москвою і Ташкентом.

Варго зазначити, що методисти радять записувати такі задачі коротко одночасно і у формі таблиці, і у формі креслення: першу частину задачі на знаходження швидкості можна подати у формі таблиці.

	S (км)	V ($\frac{\text{км}}{\text{год}}$)	t (год)
Ташкентський	132	?	4
Московський		?, на 9 більше	



Розв'язання	
<p>Перший спосіб</p> <p>1) $132 : 4 = 33 (\frac{\text{км}}{\text{год}})$ — швидкість ташкентського поїзда;</p> <p>2) $33 + 9 = 42 (\frac{\text{км}}{\text{год}})$ — швидкість московського поїзда;</p> <p>3) $33 \cdot 45 = 1485$ (км) — відстань, яку подолав Ташкентський поїзд;</p> <p>4) $42 \cdot 45 = 1890$ (км) — відстань, яку подолав Московський поїзд;</p> <p>5) $1485 + 1890 = 3375$ (км) — відстань, яку подолали обидва поїзди; відстань між Москвою і Ташкентом</p>	<p>Другий спосіб</p> <p>1) $132 : 4 = 33 (\frac{\text{км}}{\text{год}})$ — швидкість ташкентського поїзда;</p> <p>2) $33 + 9 = 42 (\frac{\text{км}}{\text{год}})$ — швидкість московського поїзда;</p> <p>3) $33 + 42 = 75$ (км) — на стільки наближаються поїзди один до одного за 1 год;</p> <p>4) $75 \cdot 45 = 3375$ (км) — на стільки наблизяться поїзди один до одного за 45 год; відстань між Москвою і Ташкентом</p>
Відповідь: 3375 км між Москвою і Ташкентом	

11. О 7 год ранку з двох сіл назустріч один одному виїхали двоє велосипедистів. Швидкість першого велосипедиста $14 \frac{\text{км}}{\text{год}}$, а другого — $13 \frac{\text{км}}{\text{год}}$. Перший велосипедист приїхав у село, з якого виїхав перший, об 11 год ранку. На якій відстані від села, з якого виїхав перший велосипедист, знаходився в цей час другий?

2.2. Методика навчання молодших школярів розв'язування задач на неодноразовий рух

Задачі на рух, у який рух обох тіл починається в різний час, належать до задач на неодноразовий рух. Розв'язання таких задач містить два етапи:

- 1) на першому етапі розглядається самостійний рух тіла, що вирушило раніше;
- 2) на другому етапі — одночасний рух двох тіл.

Розглянемо декілька прикладів розв'язування задач на неодноразовий рух.

Задача. З міста вирушив пасажирський поїзд зі швидкістю $70 \frac{\text{км}}{\text{год}}$. Через 2 год із цього самого міста у протилежному напрямку вирушив швидкий поїзд зі швидкістю $120 \frac{\text{км}}{\text{год}}$. Яка відстань буде між поїздами через 3 год після виходу швидкого поїзду?

— Про що йдеться в задачі? (Про рух двох поїздів.)

— Що відомо про час початку руху? (Вони виїхали неодноразово. Спочатку вирушив пасажирський поїзд, і лише через 2 год вирушив швидкий поїзд.)

— Як рухаються поїзди? (Спочатку пасажирський поїзд рухався самостійно, а коли виїшов швидкий поїзд, то вони рухалися в протилежних напрямках.)

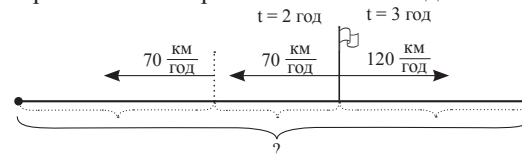
Отже, можна цю задачу розділити на дві частини:

- у першій частині розглянути самостійний рух пасажирського поїзда: «З міста вирушив пасажирський поїзд зі швидкістю $70 \frac{\text{км}}{\text{год}}$ і рухався 2 год. Яку відстань він подолав?»;
- у другій частині розглянути одночасний рух пасажирського та швидкого поїздів у протилежних напрямках: «З міста вирушив пасажирський поїзд зі швидкістю $70 \frac{\text{км}}{\text{год}}$. З цього самого міста в протилежному напрямку вирушив швидкий поїзд зі швидкістю $120 \frac{\text{км}}{\text{год}}$. Яка відстань буде між поїздами через 3 год після виходу швидкого поїзда?»

— Як знайти відстань за відомими швидкістю та часом? (Щоб знайти відстань, слід швидкість помножити на час.)

— Які висновки можна зробити при одночасному русі в протилежних напрямках? (Відстань між поїздами весь час збільшується. Увесь шлях складається із суми відстаней, яку подолав кожний поїзд. На рух поїзди витратили однаковий час — 3 год.)

Зробимо креслення. На кресленні покажемо дві частини задачі:



— За коротким записом поясніть числа задачі. (Число 70 означає швидкість пасажирського поїзда. $70 \frac{\text{км}}{\text{год}}$ означає, що пасажирський поїзд за кожен годину проходить 70 км. Число 2 означає час, який паса-

жирський поїзд рухався самостійно. Число 120 — швидкість швидкого поїзда. $120 \frac{\text{км}}{200}$ означає, що кожну годину швидкий поїзд проходить по 120 км. Число 3 означає час руху швидкого й пасажирського поїздів при їх одночасному русі в протилежних напрямках.)

— Треба знайти відстань між поїздами. Уся відстань складається з відстані самостійного руху пасажирського поїзда та відстані, на яку віддалилися поїзди при одночасному русі в протилежних напрямках. Що варто знати, щоб відповісти на запитання задачі? (Слід знати два числові значення: відстань, яку пройшов пасажирський поїзд при самостійному русі, невідомо; відстань, на яку віддалилися поїзди при одночасному русі в протилежних напрямках, невідомо.)

— Якою арифметичною дією дамо відповідь на запитання задачі? (Дією додавання.)

— Чи можна відразу відповісти на запитання задачі? (Ні, ми не знаємо обидва числові значення.)

— Що варто знати, щоб визначити відстань, яку пройшов пасажирський поїзд при самостійному русі? (Слід знати два числові значення: швидкість пасажирського поїзда, відомо — $70 \frac{\text{км}}{200}$; час його самостійного руху, відомо — 2 год.)

— Якою арифметичною дією дамо відповідь на це запитання? (Дією множення.)

— Чи можна одразу відповісти на це запитання? (Так, відомо обидва числові значення.) А на запитання задачі? (Ні, ми не знаємо на яку відстань віддалилися поїзди при одночасному русі в протилежних напрямках.)

— Що варто для цього знати? (Слід знати два числові значення: на скільки віддаляються поїзди за кожну годину, невідомо; час їх спільного руху, відомо — 3 год.)

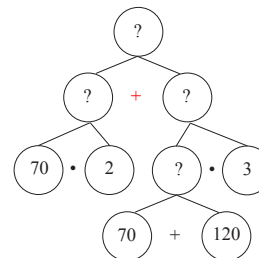
— Якою арифметичною дією дамо відповідь на це запитання? (Дією множення.)

— Чи можна одразу відповісти на це запитання? (Ні, ми не знаємо, на скільки віддаляються поїзди за кожну годину.)

— Що для цього варто знати? (Слід знати два числові значення: відстань, яку проходить за кожну годину пасажирський поїзд, відомо — 70 км; відстань, яку проходить за кожну годину швидкий поїзд, відомо — 120 км.)

— Якою арифметичною дією дамо відповідь на це запитання? (Дією додавання.)

— Чи можна відразу відповісти на це запитання. (Так, ми від запитання перейшли до числових даних. Аналіз закінчено.)

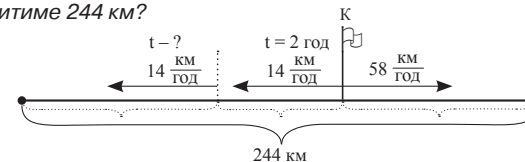


— Складіть план розв'язування задачі. (Першою дією визначаємо відстань, яку проїхав пасажирський поїзд, рухаючись самостійно. Другою дією — на скільки віддаляються поїзди один від одного за кожну годину при одночасному русі в протилежних напрямках. Третьою дією — на скільки віддаляються поїзди за 3 год при одночасному русі в протилежних напрямках. Четвертою дією — відстань між поїздами через 3 год після виходу швидкого поїзду.)

Запишіть розв'язання за діями з поясненням.

Розв'язання	
Перший спосіб	Другий спосіб
1) $70 \cdot 2 = 140$ (км) — відстань, яку проїхав пасажирський поїзд, рухаючись самостійно; 2) $70 + 120 = 190$ (км) — на скільки віддаляються поїзди один від одного за кожну годину при одночасному русі в протилежних напрямках; 3) $190 \cdot 3 = 570$ (км) — на скільки віддаляються поїзди за 3 год при одночасному русі в протилежних напрямках; 4) $140 + 570 = 710$ (км) — відстань між поїздами через 3 год після виходу швидкого поїзду	1) $70 \cdot 2 = 140$ (км) — відстань, яку проїхав пасажирський поїзд, рухаючись самостійно; 2) $70 \cdot 3 = 210$ (км) — проїхав пасажирський поїзд після виходу швидкого; 3) $120 \cdot 3 = 360$ (км) — проїхав швидкий поїзд; 4) $210 + 360 = 570$ (км) — проїхали швидкий і пасажирський поїзди разом при одночасному русі в протилежних напрямках; 5) $570 + 140 = 710$ (км) — відстань між поїздами через 3 год після виходу швидкого поїзда
Відповідь: 710 км буде відстань між поїздами через 3 год після виходу швидкого поїзда	

Задача 2. З пункту К виїхав велосипедист зі швидкістю $14 \frac{\text{км}}{\text{год}}$. Через 2 год із цього пункту в протилежному напрямі виїхав вантажний автомобіль зі швидкістю $58 \frac{\text{км}}{\text{год}}$. Через скільки годин після виходу автомобіля відстань між ними становитиме 244 км?

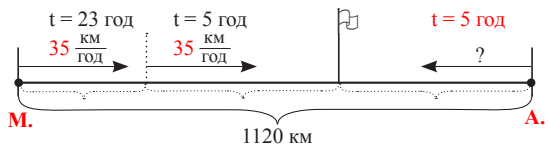


Розв'язання:

- 1) $14 \cdot 2 = 28$ (км) — відстань, яку проїхав велосипедист, рухаючись самостійно;
- 2) $58 + 14 = 72$ (км) — на стільки віддаляються велосипедист і вантажний автомобіль один від одного за кожну годину при одночасному русі в протилежних напрямках;
- 3) $244 - 28 = 216$ (км) — на стільки віддалилися велосипедист і автомобіль за весь час одночасного руху в протилежних напрямках;
- 4) $216 : 72 = 3$ — стільки годин рухався автомобіль.

Відповідь: через 3 год відстань між велосипедистом і автомобілем становитиме 244 км.

Задача 3. Від Москви до Архангельська, відстань між якими 1120 км, вирушив поїзд зі швидкістю $35 \frac{\text{км}}{\text{год}}$. Через 23 год з Архангельська назустріч йому вийшов поїзд. З якою швидкістю їхав поїзд з Архангельська, якщо поїзди зустрілися через 5 год після виходу другого поїзду?



Розв'язання:

- 1) $35 \cdot 23 = 805$ (км) — відстань, яку проїхав поїзд від Москви, рухаючись самостійно;
- 2) $1120 - 805 = 315$ (км) — відстань, на яку наблизилися поїзди при одночасному русі назустріч;
- 3) $315 : 5 = 63$ (км) — на стільки наближаються поїзди один до одного за кожну годину;
- 4) $63 - 35 = 28$ (км) — проходить другий поїзд за кожну годину, тому швидкість другого поїзду — $28 \frac{\text{км}}{\text{год}}$.

Відповідь: поїзд з Архангельська їхав зі швидкістю $28 \frac{\text{км}}{\text{год}}$.

Зазначимо, що для цієї задачі існує другий спосіб розв'язання.

Задачі на неодноразовий рух можна дещо ускладнити:

4. Відстань між містами А та В — 520 км. О 8 год ранку від А до В вийшов автобус зі швидкістю $56 \frac{\text{км}}{\text{год}}$, а об 11 год дня від В до А вийшла вантажівка зі швидкістю $32 \frac{\text{км}}{\text{год}}$. О котрій годині вони зустрінуться і на якій відстані від міста А?

5. Опівдні від пристані відійшов пароплав зі швидкістю $16 \frac{\text{км}}{\text{год}}$. Через 3 год від тієї самої пристані в тому самому напрямку відійшов другий пароплав і через 12 год після виходу догнав перший пароплав. Визначте швидкість другого пароплава.

6. Два поїзди вийшли в різний час назустріч один одному з двох станцій, відстань між якими 794 км. Перший поїзд ішов зі швидкістю $52 \frac{\text{км}}{\text{год}}$, а швидкість другого на $10 \frac{\text{км}}{\text{год}}$ менша. До місця зустрічі перший поїзд пройшов 416 км. Який поїзд вийшов раніше й на скільки?

7. Від міста А у напрямі до міста В вийшов поїзд зі швидкістю $50 \frac{\text{км}}{\text{год}}$. Через 12 год від того самого міста вилетів літак зі швидкістю у 7 разів більшою за швидкість поїзда і наздогнав поїзд на половині шляху від А до В. Визначте відстань між містами.

8. Від пристані А до пристані В відправився пароплав зі швидкістю $24 \frac{\text{км}}{\text{год}}$, а за 9 год до нього в цьому самому напрямі вийшов буксир із баржами зі швидкістю $8 \frac{\text{км}}{\text{год}}$ і прибув до В на 15 год пізніше від пароплава. Знайдіть відстань між пристанями.

2.3. Складання задач на одночасний рух назустріч або в протилежних напрямках за таблицею або виразом

Для подальшого усвідомлення спільного й відмінного в задачах на одночасний рух назустріч або в протилежних напрямках учням пропонують завдання на складання задач за таблицями.

За кожною з цих таблиць можна скласти дві задачі: на одночасний рух назустріч і на одночасний рух у протилежних напрямках. Ці задачі мають однакову математичну модель.

1. Складіть задачу за кожною таблицею:

1)

	Відстань (км)	Швидкість ($\frac{\text{км}}{\text{год}}$)	Час (год)
I		60	4
II		75	
I і II	?	?	

2)

	Відстань (км)	Швидкість ($\frac{\text{км}}{\text{год}}$)	Час (год)
I		70	
II		90	
I і II	800	?	

3)

	Відстань (км)	Швидкість ($\frac{\text{км}}{\text{год}}$)	Час (год)
I		?	3
II		11	
I і II	78	?	

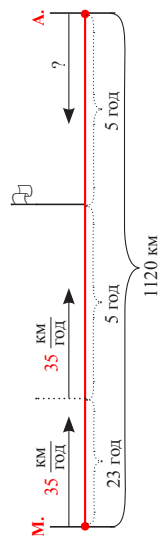
4)

	Відстань (км)	Швидкість ($\frac{\text{км}}{\text{год}}$)	Час (год)
I		18	2
II		?	
I і II	76	?	

— Скільки задач можна скласти до кожної таблиці? (Дві: задачу на одночасний рух назустріч та задачу на одночасний рух у протилежних напрямках.)

— Зробіть креслення до кожної задачі.

— Скількома способами можна розв'язати кожну задачу?



— Запишіть розв'язання задачі виразом.

Також пропонують учням, використовуючи дані таблиць, скласти задачі, які мають такі математичні моделі:

$$S = V_1 \cdot t + V_2 \cdot t; \quad S = (V_1 + V_2) \cdot t$$

$$t = S : (V_1 + V_2)$$

$$V_1 = (S - V_2 \cdot t) : t;$$

$$V_1 = S : t - V_2$$

$$V_2 = (S - V_1 \cdot t) : t;$$

$$V_2 = S : t - V_1$$

2. Використовуючи дані таблиці складіть задачі, які розв'язуються виразом:

	Відстань (км)	Швидкість ($\frac{\text{км}}{\text{год}}$)	Час (год)
I		35	6
II		40	
I і II	450	?	

$$35 \cdot 6 + 40 \cdot 6$$

$$(35 + 40) \cdot 6$$

$$450 : (35 + 40)$$

$$(450 - 35 \cdot 6) : 6$$

$$450 : 6 - 35$$

$$(450 - 40 \cdot 6) : 6$$

$$450 : 6 - 40$$

— Що цікавого ви помітили? (До першого й другого виразу можна скласти одну й ту саму задачу або на одночасний рух назустріч або на одночасний рух у протилежних напрямках. Те саме можна сказати і про четвертий і п'ятий або шостий та сьомий вирази.)

2.4. Зіставлення задач на спільну роботу, у яких продуктивність спільної праці являє собою суму продуктивностей виконавців, із задачами на одночасний рух у різних напрямках

Учням пропонують для розв'язання пари задач з однаковими числовими даними, але перша задача — на рух, а друга задача — на спільну роботу.

1. Запишіть кожну задачу коротко у формі таблиці й порівняйте задачі:

1. З двох станцій виїхали одночасно назустріч один одному два товарні потяги й зустрілися через 5 год. Перший потяг рухався зі швидкістю $29 \frac{\text{км}}{\text{год}}$, а другий — $35 \frac{\text{км}}{\text{год}}$. Яка відстань між станціями?				2. Двоє робітників виконали планове завдання за 5 год, працюючи разом. Перший робітник виготовляв 29 деталей за кожну годину, а другий — 35 деталей за кожну годину. Скільки деталей становило планове завдання?			
	Відстань (км)	Швидкість ($\frac{\text{км}}{\text{год}}$)	Час (год)		Загальний виробіток	Продуктивність праці (шт.)	Час роботи (год)
I		29	5	I		29	5
II		35		II		35	
I і II	?	?		I і II	?	?	

— Що спільного в задачах? (У них спільні числові дані. У першій задачі число 5 означає час спільного руху, а в другій — час спільної праці. У першій задачі число 29 означає швидкість першого потяга, а в другій — продуктивність праці першого робітника. У першій задачі число 35 означає швидкість другого потяга, а в другій — продуктивність праці другого робітника. У першій задачі шуканою є відстань, яку подолали разом обидва потяги, рухаючись назустріч один одному; а в другій — загальний виробіток при спільній праці обох робітників.)

— Розв'яжіть кожну задачу двома способами.

Розв'язання	
<p>Перший спосіб</p> <p>1) $29 \cdot 5 = 145$ (км) — відстань, яку подолав перший потяг за 5 год;</p> <p>2) $35 \cdot 5 = 175$ (км) — відстань, яку подолав другий потяг за 5 год;</p> <p>3) $145 + 175 = 320$ (км) — відстань, яку подолали обидва потяги, рухаючись назустріч один одному до моменту зустрічі.</p> <p>$29 \cdot 5 + 35 \cdot 5 = 320$ (км)</p>	<p>Перший спосіб</p> <p>1) $29 \cdot 5 = 145$ (шт.) — загальний виробіток першого робітника за 5 год;</p> <p>2) $35 \cdot 5 = 175$ (шт.) — загальний виробіток другого робітника за 5 год;</p> <p>3) $145 + 175 = 320$ (шт.) — загальний виробіток обох робітників при їхній спільній роботі.</p> <p>$29 \cdot 5 + 35 \cdot 5 = 320$ (шт.)</p>
<p>Другий спосіб</p> <p>1) $29 + 35 = 64$ (км) — на стільки зменшується відстань між потягами за 1 год;</p> <p>2) $64 \cdot 5 = 320$ (км) — на стільки зменшилася відстань між потягами за 5 год, така відстань між станціями.</p> <p>$(29 + 35) \cdot 5 = 320$ (км)</p>	<p>Другий спосіб</p> <p>1) $29 + 35 = 64$ (шт.) — деталей виготовляють за 1 год обидва робітники; продуктивність спільної праці;</p> <p>2) $64 \cdot 5 = 320$ (шт.) — деталей виготовили обидва робітники за 5 год; загальний виробіток при спільній праці.</p> <p>$(29 + 35) \cdot 5 = 320$ (шт.)</p>

— Порівняйте перші способи розв'язання цих задач. (Арифметичні дії ті самі, але різні пояснення.)

— Про що в обох задачах ми дізналися першою дією? (Про відстань або загальний виробіток першого об'єкта.)

— Другою дією? (Про відстань або загальний виробіток другого об'єкта.)

— Третьою дією? (Про відстань або загальний виробіток обох об'єктів.)

— Порівняйте другі способи розв'язання. (Арифметичні дії ті самі. Але різні пояснення.)

— Про що в обох задачах ми дізналися першою дією? (Про числове значення зміни відстані між тілами за 1 год або про продуктивність спільної праці.) Другою дією? (Про числове значення зміни відстані між тілами за весь час руху, про відстань, або про загальний виробіток при спільній праці.)

— Що можна сказати про вирази, які є розв'язками цих задач? (Вирази однакові.) *Задача на знаходження відстані при одночасному русі назустріч і задача на знаходження загального виробітку спільної роботи мають однакові математичні моделі.*

2. Запишіть кожну задачу коротко у формі таблиці й порівняйте задачі:

1. З одного пункту одночасно в протилежних напрямках виїхали мотоцикліст і велосипедист. Яка відстань буде між ними через 3 год, якщо мотоцикліст їде зі швидкістю $50 \frac{\text{км}}{\text{год}}$, а велосипедист — $13 \frac{\text{км}}{\text{год}}$?	2. Скільки тонн води можна викачати з басейну двома насосами за 3 год, якщо перший за кожну годину викачує 50 т води, а другий — 13 т?
---	--

Над цими задачами працюємо аналогічно. Порівнюємо першу пару та другу пару задач і встановлюємо, що в першій парі — задача на рух назустріч, а в другій — на рух у протилежних напрямках; ця зміна не вплинула на висновки, що були зроблені при розв'язанні попередньої пари задач — задачі на одночасний рух назустріч або в протилежних напрямках і відповідні задачі на спільну роботу мають однакові математичні моделі.

Узагальнюємо математичні структури та способи розв'язання *задач на знаходження відстані при одночасному русі в різних напрямках та задач на знаходження загального виробітку (табл. 8).*

Таблиця 8

Опорні схеми та плани розв'язування задач на знаходження відстані при одночасному русі в різних напрямках та задач на знаходження загального виробітку

	Загальний виробіток; відстань	Продуктивність праці; швидкість	Час, год
I		N_1 / V_1	t
II		N_2 / V_2	
I і II	?	?	
Перший спосіб		Другий спосіб	
$A = N_1 \cdot t + N_2 \cdot t$ $S = V_1 \cdot t + V_2 \cdot t$		$A = (N_1 + N_2) \cdot t$ $S = (V_1 + V_2) \cdot t$	
План розв'язання			
1) знаходимо загальний виробіток (або відстань) першого об'єкта для даного значення часу; 2) знаходимо загальний виробіток (або відстань) другого об'єкта для даного значення часу; 3) знаходимо загальний виробіток (або відстань) першого та другого об'єктів при їх спільній праці (спільному русі)		1) знаходимо продуктивність спільної праці (або на скільки змінюється відстань між тілами за одиницю часу); 2) знаходимо загальний виробіток при спільній роботі (або на скільки змінилася відстань між тілами за час їх спільного руху)	

3. Запишіть кожну задачу коротко у формі таблиці та порівняйте задачі:

1) З двох протилежних боків озера, відстань між якими 45 км, одночасно назустріч один одному поплили два плавці. Перший плив зі швидкістю $7 \frac{\text{км}}{\text{год}}$, а другий — $8 \frac{\text{км}}{\text{год}}$. Через який час вони зустрінуться?	2) Бак вміщує 45 т води. Через скільки годин може наповнитися цей бак через два крани, якщо через перший кран за кожну годину вливається 7 т води, а через другий — 8 т?
--	--

— Що спільного в задачах? (У них спільні числові дані. У першій задачі число 7 означає швидкість першого плавця, а в другій — продуктивність першого крана. У першій задачі число 8 означає швидкість другого плавця, а в другій — продуктивність другого крана. У першій задачі число 45 означає відстань між берегами озера, тобто відстань, яку мають пропливти обидва плавці до зустрічі, а в другій задачі — загальний виробіток двох кранів при їх спільній роботі. У першій задачі шуканим є час, через який зустрінуться плавці; а в другій — час спільної праці обох робітників.)

— Розв'яжіть кожну задачу:

Розв'язання	
Перший спосіб	Другий спосіб
1) $7 + 8 = 15$ (км) — на стільки скорочується відстань між плавцями за 1 год; 2) $45 : 15 = 3$ — через стільки годин вони зустрінуться. $45 : (7 + 8) = 3$ (год)	1) $7 + 8 = 15$ (т) — води наливається за 1 год через обидва крани; продуктивність спільної праці; 2) $45 : 15 = 3$ — через стільки годин наповниться бак. $45 : (7 + 8) = 3$ (год)

— Порівняйте розв'язання цих задач. (Арифметичні дії ті самі, але різні пояснення.)

— Про що в обох задачах ми дізналися першою дією? (Про числове значення зміни відстані між тілами за 1 год або про продуктивність спільної праці.)

— Другою дією? (Про числове значення часу руху до зустрічі або часу спільної роботи.)

— Що можна сказати про вирази, які є розв'язками цих задач? (Вирази однакові.)

Задача на знаходження часу при одночасному русі назустріч і задача на знаходження часу спільної роботи мають однакові математичні моделі.

4. Запишіть кожну задачу коротко у формі таблиці й порівняйте задачі:

1) З одного пункту одночасно в протилежних напрямках виїхали двоє велосипедистів. Перший їхав зі швидкістю $14 \frac{\text{км}}{\text{год}}$, а другий — $16 \frac{\text{км}}{\text{год}}$. Через скільки годин руху відстань між ними становитиме 150 км?	2) Дві бригади робітників копають траншею. Перша бригада за кожну годину викопує 14 м траншеї, а друга — 16 м. Через скільки годин роботи обидві бригади викопують 150 м траншеї?
--	---

Над цими задачами працюємо аналогічно.

Узагальнюємо математичні структури та способи розв'язання задач на знаходження часу при одночасному русі в різних напрямках та задач на знаходження часу спільної праці:

	Загальний виробіток (або відстань)	Продуктивність праці (або швидкість)	Час
I		N_1 / V_1	?
II		N_2 / V_2	
I і II	A / S	?	

Перший спосіб	Другий спосіб
$A = N_1 \cdot t + N_2 \cdot t$ $S = V_1 \cdot t + V_2 \cdot t$	$t = A : (N_1 + N_2)$ $t = S : (V_1 + V_2)$

План розв'язання	
1) знаходимо загальний виробіток (або відстань) першого об'єкта для даного значення часу; 2) знаходимо загальний виробіток (або відстань) другого об'єкта для даного значення часу; 3) знаходимо загальний виробіток (або відстань) першого та другого об'єктів при їх спільній праці (спільному русі)	1) знаходимо продуктивність спільної праці (або на скільки змінюється відстань між тілами за одиницю часу); 2) знаходимо час спільній праці (при спільному русі)

— Запишіть задачі коротко у формі таблиці й порівняйте їх:

1. З двох міст, відстань між якими 112 км, одночасно назустріч один одному вирушили двоє вершників і зустрілися через 4 год. Яка швидкість першого вершника, якщо швидкість другого вершника — $16 \frac{\text{км}}{\text{год}}$?	2. Дві друкарки повинні надрукувати 112 сторінок тексту за 4 дні. Скільки сторінок щодня друкує перша друкарка, якщо друга друкарка за кожну годину друкує 16 сторінок?
--	---

— Що спільного в задачах? (У них спільні числові дані. У першій задачі число 112 означає відстань між містами, а в другій — загальний виробіток обох друкарок при спільній праці. У першій задачі число 4 означає час спільного руху, а в другій — час спільної праці. У першій задачі число 16 означає швидкість другого вершника, а в другій — продуктивність праці другої друкарки. У першій задачі шуканою є швидкість першого вершника, а в другій — продуктивність праці другої друкарки.)

— Розв'яжіть кожну задачу двома способами:

Розв'язання	
Перший спосіб 1) $16 \cdot 4 = 64$ (км) — відстань, яку подолав другий вершник до зустрічі; 2) $112 - 64 = 48$ (км) — відстань, яку подолав перший вершник до зустрічі; 3) $48 : 4 = 12$ ($\frac{\text{км}}{\text{год}}$) швидкість першого вершника. $(112 - 16 \cdot 4) : 4 = 12$ ($\frac{\text{км}}{\text{год}}$)	Перший спосіб 1) $16 \cdot 4 = 64$ (с.) — загальний виробіток другої друкарки; 2) $112 - 64 = 48$ (с.) — загальний виробіток першої друкарки; 3) $48 : 4 = 12$ (с.) — друкувала перша друкарка за день, продуктивність праці першої друкарки. $(112 - 16 \cdot 4) : 4 = 12$ (с.)
Другий спосіб 1) $112 : 4 = 28$ (км) — на стільки зменшується відстань між вершниками за 1 год; 2) $28 - 16 = 12$ (км) — таку відстань долає перший вершник за кожну годину, $12 \frac{\text{км}}{\text{год}}$ швидкість першого вершника. $112 : 4 - 16 = 12$ ($\frac{\text{км}}{\text{год}}$)	Другий спосіб 1) $112 : 4 = 28$ (с.) — друкують обидві друкарки за день, продуктивність спільної праці; 2) $28 - 16 = 12$ (с.) — друкує перша друкарка щодня, продуктивність праці першої друкарки. $112 : 4 - 16 = 12$ (с.)

— Порівняйте перші способи розв'язання цих задач. (Арифметичні дії ті самі, але різні пояснення.)

— Що в обох задачах ми визначили першою дією? (Відстань або загальний виробіток другого об'єкта.)

— Другою дією? (Відстань або загальний виробіток першого об'єкта.)

— Третьою дією? (Швидкість або продуктивність праці першого об'єкта.)

— Порівняйте другі способи розв'язання. (Арифметичні дії ті самі, але різні пояснення.)

— Що в обох задачах ми визначили першою дією? (Числове значення зміни відстані між тілами за 1 год або про продуктивність спільної праці.)

— Другою дією? (Відстань, яку долає перший об'єкт за 1 год, його швидкість або про продуктивність праці першого об'єкта.)

— Що можна сказати про вирази, які є розв'язками цих задач? (Вирази однакові.)

Задача на знаходження швидкості при одночасному русі назустріч і задача на знаходження продуктивності при спільній роботі мають однакові математичні моделі.

— Запишіть кожну задачу коротко у формі таблиці й порівняйте задачі:

1. З автовокзалу одночасно у протилежних напрямках виїхали два автобуси. Через 3 год відстань між ними становила 342 км. Знайдіть швидкість другого автобуса, якщо швидкість першого автобуса — $60 \frac{\text{км}}{\text{год}}$.	2. У Вінні-Пуха та П'ятачка була бочка меду. Вони за 3 год з'їли 342 ложки меду. Скільки ложок меду їв за кожну годину П'ятачок, якщо Вінні-Пух за кожну годину з'їдав по 60 ложок меду?
---	--

Над цими задачами працюємо аналогічно.

Узагальнюємо математичні структури та способи розв'язання *задач на знаходження швидкості при одночасному русі в різних напрямках та задач на знаходження продуктивності одного виконавця при спільній праці*.

	Загальний виробіток (або швидкість)	Продуктивність праці XXX	Час
I		N_1 / V_1	?
II		N_2 / V_2	
I і II	A / S	?	

Перший спосіб	Другий спосіб
$N_1 = (A - N_2 \cdot t) : t$ $V_1 = (S - V_2 \cdot t) : t$	$N_1 = A : t - N_2$ $V_1 = S : t - V_2$

План розв'язання	
1) знаходимо загальний виробіток (або відстань) другого об'єкта для даного значення часу; 2) знаходимо загальний виробіток (або відстань) першого об'єкта для даного значення часу; 3) знаходимо продуктивність праці (або швидкість) першого об'єкта	1) знаходимо продуктивність спільної праці (або на скільки змінюється відстань між тілами за одиницю часу); 2) знаходимо продуктивність першого виконавця (або яку відстань долає перше тіло за одиницю часу, його швидкість)

	Загальний виробіток (або швидкість)	Продуктивність праці XXX	Час
I		N_1 / V_1	t
II		N_2 / V_2	
I і II	A / S	?	

Перший спосіб	Другий спосіб
$N_2 = (A - N_1 \cdot t) : t$ $V_2 = (S - V_1 \cdot t) : t$	$N_2 = A : t - N_1$ $V_2 = S : t - V_1$

План розв'язання	
1) знаходимо загальний виробіток (або відстань) другого об'єкта для даного значення часу; 2) знаходимо загальний виробіток (або відстань) першого об'єкта для даного значення часу; 3) знаходимо продуктивність праці (або швидкість) першого об'єкта	1) знаходимо продуктивність спільної праці (або на скільки змінюється відстань між тілами за одиницю часу); 2) знаходимо продуктивність другого виконавця (або яку відстань долає друге тіло за одиницю часу, його швидкість)

2.4.1. Узагальнення математичних структур та способів розв'язання задач на рух та на спільну роботу

Порівняйте всі узагальнені математичні структури задач на спільну роботу та на одночасний рух. Що в них спільного? (Усі задачі містять:

- три пропорційні величини: загальний виробіток (або відстань), продуктивність праці (або швидкість), час роботи (руху);
- три випадки: перші два стосуються роботи (руху) кожного з двох об'єктів, а третій — їх спільної роботи (руху);
- чотири числові значення: продуктивність праці (або швидкість) першого об'єкта, продуктивність праці (або швидкість) другого об'єкта, загальний виробіток (або загальна відстань) при їх спільній праці (спільному русі) та час спільної роботи (спільного руху);
- три з них дано, а одне є шуканим.)

Узагальнимо математичну структуру задач цих типів та способи розв'язання пар задач:

- на знаходження відстані або загального виробітку;
- на знаходження часу руху або часу спільної праці;
- на знаходження швидкості або продуктивності одного з об'єктів.

	Загальний виробіток (або загальна відстань)	Продуктивність праці (або швидкість)	Час
I		N_1 / V_1	t
II		N_2 / V_2	
I і II	A / S	?	

Перший спосіб	Другий спосіб
$A = N_1 \cdot t + N_2 \cdot t$ $S = V_1 \cdot t + V_2 \cdot t$	$A = (N_1 + N_2) \cdot t$ $S = (V_1 + V_2) \cdot t$
	$t = A : (N_1 + N_2)$ $t = S : (V_1 + V_2)$
$N_1 = (A - N_2 \cdot t) : t$ $N_2 = (A - N_1 \cdot t) : t$ $V_1 = (S - V_2 \cdot t) : t$ $V_2 = (S - V_1 \cdot t) : t$	$N_1 = A : t - N_2$ $N_2 = A : t - N_1$ $V_1 = S : t - V_2$ $V_2 = S : t - V_1$

2.4.2. Перетворення задачі на рух у задачу на спільну роботу. Перетворення задачі на спільну роботу в задачу на рух

Учням пропонують три задачі на одночасний рух у різних напрямках: на знаходження відстані, на знаходження швидкості та на знаходження часу руху. Ці задачі школярі перетворюють, відповідно, у задачі на знаходження загального виробітку спільної праці, на знаходження продуктивності одного з виконавців та на знаходження

часу спільної праці. При перетворенні задач на спільну роботу в задачі на одночасний рух у різних напрямках, до кожної задачі на спільну роботу учні складають по дві задачі на рух — на рух назустріч та на рух у протилежних напрямках. Учитель вимагає записати розв'язання кожної задачі виразами, учні застосовують висновки, які були зроблені на попередньому етапі навчання, і складають до пари задач лише один вираз до кожного способу розв'язання.

1. Перетворіть задачі на рух у відповідні задачі на спільну роботу. Запишіть розв'язання кожної задачі виразом.

1) З двох селищ, відстань між якими 116 км, вийшли одночасно двоє лижників і зустрілися через 4 год. З якою швидкістю йшов перший лижник, якщо швидкість другого лижника — $15 \frac{\text{км}}{\text{год}}$?

2) З одного аеродрому одночасно в протилежних напрямках вилетіли два вертольоти. Яка відстань буде між ними через 2 год, якщо швидкість першого вертольота $120 \frac{\text{км}}{\text{год}}$, а швидкість другого — $150 \frac{\text{км}}{\text{год}}$?

3) З двох пристаней, відстань між якими 441 км, одночасно назустріч один одному вийшли два пароплави. Через скільки годин вони зустрілися, якщо швидкість першого пароплава $28 \frac{\text{км}}{\text{год}}$, а другого $35 \frac{\text{км}}{\text{год}}$?

— Чи треба записувати вирази до кожного способу розв'язання окремо до задачі на рух та окремо до задачі на спільну роботу?

2. Перетворіть задачі на спільну роботу в задачі на одночасний рух у різних напрямках. Запишіть розв'язання кожної задачі виразом.

1) Автомашиною ГАЗ можна перевезти 25 ц вугілля за один рейс, а машиною КамАЗ — 50 ц за один рейс. За скільки рейсів перевезуть 600 ц вугілля обидві машини?

2) Скільки літрів води викачають два насоси за 9 хв, якщо перший викачає 120 л за хвилину, а другий — 130 л за хвилину?

3) Двоє робітників повинні зробити 546 деталей за 42 робочі год. Скільки деталей виготовляє другий робітник, якщо перший за кожну годину робить 6 деталей?

2.4.3. Перетворення задач на спільну роботу, у якій не дано продуктивності кожного виконавця, у відповідні задачі (ускладнені) на рух

Учням пропонують задачу на спільну роботу на знаходження часу спільної праці, записують її коротко у формі таблиці й розв'язують її. Далі вчитель пропонує перетворити цю задачу в задачу на одночасний рух назустріч.

1. До якого виду належить задача? Запишіть її коротко у формі таблиці. Розв'яжіть цю задачу.

Задача. У басейні 2520 л води. Один насос може викачати цю воду за 21 хв, а другий — за 28 хв. За скільки хвилин викачають цю воду обидва насоси, працюючи разом?

	Загальний виробіток (л)	Продуктивність праці	Час роботи (хв)
I	2520	?	21
II	2520	?	28
I і II	2520	?	?

Розв'язання:

1) $2520 : 21 = 120$ (л) — за 1 хв викачає перший насос; *продуктивність праці першого насоса;*

2) $2520 : 28 = 90$ (л) — за 1 хв викачає другий насос; *продуктивність праці другого насоса;*

3) $120 + 90 = 210$ (л) — за 1 хв викачають обидва насоси; *продуктивність спільної праці;*

4) $2520 : 210 = 12$ — за стільки хвилин викачають 2520 л води обидва насоси; *час спільної праці.*

Або $2520 : (2520 : 21 + 2520 : 28) = 12$ (хв).

Перетворимо цю задачу в задачу на одночасний рух назустріч. Змініть величини в таблиці:

	Відстань (м)	Швидкість	Час (хв)
I	2520	?	21
II	2520	?	28
I і II	2520	?	?

— Складіть задачу за таблицею.

Задача. Відстань між будинками двох хлопчиків 2520 м. Перший хлопчик проходить цю відстань за 21 хв, а другий — за 28 хв. Через скільки хвилин хлопчики зустрінуться, якщо вони вирушать одночасно назустріч один одному?

— Що означає число 2520? (*Відстань, яку подолав перший хлопчик за 21 хв. Відстань, яку подолав другий хлопчик за 28 хв. Відстань, яку повинні пройти обидва хлопчики до зустрічі.*)

— Як зміна формулювання задачі вплине на її розв'язання? Чи зміняться арифметичні дії? (*Ні.*)

— Що ми визначимо першою дією? (*Швидкість першого хлопчика.*)

— Другою дією? (*Швидкість другого хлопчика.*)

— Третьою дією? (*На скільки метрів хлопчики наблизилися один до одного за 1 хв.*)

— Четвертою дією? (*Час руху хлопчиків до зустрічі.*)

— Виконайте зміни в розв'язанні задачі.

— Складіть за цією таблицею задачу на одночасний рух у протилежних напрямках.

Задача. Шлях між будинками двох хлопчиків через школу 2520 м. Якщо вони одночасно виходять від школи, то й одночасно приходять до дому. Два хлопчики одночасно вийшли зі школи й пішли в протилежних напрямках до власних будинків. Перший хлопчик проходить усю цю відстань за 21 хв, а другий — за 28 хв. Через скільки хвилин хлопчики будуть удома?

— Як ця зміна вплине на розв'язання задачі? (Розв'язання не зміниться. Слід виправити лише пояснення до третьої дії.)

— Чим відрізняється розв'язання цих двох задач від розв'язання звичайних задач на знаходження часу при одночасному русі? (Задачі на знаходження часу ми розв'язували двома діями. Ці задачі дещо ускладнені — у них не дано швидкості кожного тіла, а дано для кожного з них час та відстань. Тому для розв'язання таких задач слід виконати додатково ще дві дії, щоб знайти швидкості кожного тіла.)

— Отже, задачі на знаходження часу при спільній роботі та на знаходження часу руху при одночасному русі в різних напрямках мають одну й ту саму математичну структуру та одну математичну модель.

	Загальний виробіток (або загальна відстань)	Продуктивність праці (або швидкість)	Час
I	A / S	?	t_1
II	A / S	?	t_2
I і II	A / S	?	?
Перший спосіб	Другий спосіб		
	$t = A : (A : t_1 + A : t_2)$ $t = S : (S : t_1 + S : t_2)$		
План розв'язання			
	1) знаходимо продуктивність праці (швидкість) першого об'єкта; 2) знаходимо продуктивність праці (швидкість) другого об'єкта; 3) знаходимо продуктивність спільної праці (або на скільки змінюється відстань між тілами за одиницю часу); 4) знаходимо час спільної праці (спільного руху)		

2. Розв'яжіть задачу на спільну роботу:

Задача. Перша бригада проклала за 3 дні 120 м дороги, а друга — 200 м за 4 дні. Скільки метрів дороги прокладуть за 2 дні обидві бригади, якщо працюватимуть разом?

	Загальний виробіток (м)	Продуктивність праці	Час (дні)
I	120	?	3
II	200	?	4
I і II	?	?	2

Розв'язання	
Перший спосіб	Другий спосіб
1) $120 : 3 = 40$ (м) дороги за 1 день проклала перша бригада; продуктивність праці першої бригади;	1) $120 : 3 = 40$ (м) дороги за 1 день проклала перша бригада; продуктивність праці першої бригади;
2) $40 \cdot 2 = 80$ (м) дороги за 2 дні проклала перша бригада;	2) $120 : 4 = 30$ (м) дороги за 1 день проклала друга бригада; продуктивність праці другої бригади;
3) $120 : 4 = 30$ (м) дороги за 1 день проклала друга бригада; продуктивність праці другої бригади;	3) $40 + 30 = 70$ (м) дороги за 1 день проклали обидві бригади; продуктивність спільної праці;
4) $30 \cdot 2 = 60$ (м) дороги проклала друга бригада.	4) $70 \cdot 2 = 140$ (м) дороги за 2 дні проклали обидві бригади; загальний виробіток при спільній праці;
5) $80 + 60 = 140$ (м) дороги за 2 дні проклали обидві бригади; загальний виробіток при спільній праці;	$(120 : 3 + 120 : 4) \cdot 2 = 140$ (м)
$120 : 3 \cdot 2 + 120 : 4 \cdot 2 = 140$ (м)	

— Перетворимо цю задачу в задачу на одночасний рух у протилежних напрямках. Змініть величини в таблиці:

	Відстань (м)	Швидкість	Час (хв)
I	120	?	3
II	120	?	4
I і II	?	?	2

— Складіть задачу за таблицею.

Задача. Яка відстань буде між хлопчиком і дівчинкою через 2 хв, якщо вони вирушили одночасно в протилежних напрямках від гойдалки на дитячому майданчику? Хлопчик проходить відстань 120 м за 3 хв, а дівчинка за 4 хв.

— Що означає число 120? (Відстань, яку подолав хлопчик за 3 хв. Відстань, яку пододала дівчинка за 4 хв. Число 2 означає час їхнього спільного руху.)

— Як зміна формулювання задачі вплине на її розв'язання? Чи зміняться арифметичні дії у першому способі? (Ні.)

— Що ми визначимо першою дією? (Швидкість хлопчика.)

— Другою дією? (Відстань, яку пройшов хлопчик за 2 хв.)

— Третьою дією? (Швидкість дівчинки.)

— Четвертою дією? (Відстань, яку пройшла дівчинка за 2 хв.)

— П'ятою дією? (Час руху дітей.)

— Виконайте зміни в розв'язанні задачі.

— Чи зміняться арифметичні дії в другому способі? (Ні.)

- Що ми визначимо першою дією? (*Швидкість хлопчика.*)
- Другою дією? (*Швидкість дівчинки.*)
- Третьою дією? (*На скільки метрів діти віддаляються один до одного за 1 хв.*)
- Четвертою дією? (*Час руху дітей.*)
- Виконайте зміни в розв'язанні другим способом.
- Складіть за цією таблицею задачу на одночасний рух назустріч.

Задача. Хлопчик проходить відстань 120 м за 3 хв, а дівчинка за 4 хв. З двох боків стадіону одночасно назустріч один одному вирушили хлопчик і дівчинка й зустрілися через 2 хв. Яка відстань між двома боками стадіону?

— Як ця зміна вплине на розв'язання задачі? (*Розв'язання першим способом зовсім не зміниться. У розв'язанні другим способом треба виправити лише пояснення до третьої дії.*)

— Чим відрізняється розв'язання цих двох задач від розв'язання звичайних задач на знаходження відстані при одночасному русі в різних напрямках? (*Задачі на знаходження відстані ми розв'язували трьома або двома діями. Ці задачі децю ускладнені — у них не дано швидкості кожного тіла, а дано для кожного з них час та відстань. Тому для розв'язання таких задач треба виконати додатково ще дві дії, щоб знайти швидкості кожного тіла.*)

Отже, задачі на знаходження загального виробітку при спільній роботі та відстані при одночасному русі в різних напрямках мають одну й ту саму математичну структуру та одну математичну модель.

	Загальний виробіток (або загальна відстань)	Продуктивність праці (або швидкість)	Час
I	A / S	?	t_1
II	A / S	?	t_2
I і II	?	?	t

Перший спосіб	Другий спосіб
$A = A : t_1 \cdot t + A : t_2 \cdot t$ $S = S : t_1 \cdot t + S : t_2 \cdot t$	$A = (A : t_1 + A : t_2) \cdot t$ $S = (S : t_1 + S : t_2) \cdot t$
План розв'язання	
1) знаходимо продуктивність праці (швидкість) першого об'єкта; 2) знаходимо продуктивність праці (швидкість) другого об'єкта; 3) знаходимо загальний виробіток (відстань) першого об'єкта для даного значення часу спільної роботи (спільного руху); 4) знаходимо загальний виробіток (відстань) першого та другого об'єктів при їх спільній праці (спільному русі)	1) знаходимо продуктивність праці (швидкість) першого об'єкта; 2) знаходимо продуктивність праці (швидкість) другого об'єкта; 3) знаходимо продуктивність спільної праці (або на скільки змінюється відстань між тілами за одиницю часу); 4) знаходимо загальний виробіток при спільній праці (або на скільки змінюється відстань між тілами за час їх спільного руху)

3. Розв'яжіть задачу на спільну роботу:

Задача. Обидва насоси викачали 4800 відер води за 15 год роботи. За скільки годин викачає цю воду перший насос, якщо другий насос це може зробити за 24 год?

	Загальний виробіток (в.)	Продуктивність праці	Час (год)
I	4800	?	?
II	4800	?	24
I і II	4800	?	15

Розв'язання:

1) $4800 : 15 = 320$ (в.) — за 1 год викачують обидва насоси; продуктивність спільної праці;

2) $4800 : 24 = 200$ (в.) — за 1 год викачає другий насос; продуктивність праці другого насоса;

3) $320 - 200 = 120$ (в.) — за 1 год викачає перший насос, продуктивність праці першого насоса;

4) $4800 : 120 = 40$ (год) — за стільки викачає 4800 відер води перший насос.
 $4800 : (4800 : 15 - 4800 : 24) = 40$ (год).

Перетворимо цю задачу в задачу на одночасний рух у протилежних напрямках. Змініть величини в таблиці:

	Відстань (м)	Швидкість	Час (хв)
I	4800	?	?
II	4800	?	24
I і II	4800	?	15

— Складіть задачу за таблицею.

Задача. З одного аеродрому одночасно в протилежних напрямках вилетіли два вертольоти й через 15 хв відстань між ними становила 4800 м. За скільки хвилин може подолати цю відстань перший вертоліт, якщо другий вертоліт пролітає 4800 м за 24 хв?

— Що означає число 4800? (*Відстань, яку подолали вертольоти за 15 хв, рухаючись одночасно в протилежних напрямках. Відстань, яку подолав другий вертоліт самостійно за 24 хв. Відстань, яку повинен пролетіти самостійно перший вертоліт.*)

— Як зміна формулювання задачі вплине на її розв'язання? Чи зміняться арифметичні дії? (*Ні.*)

— Що ми визначимо першою дією? (*На скільки метрів наблизилися вертольоти один до одного за 1 хв.*)

— Другою дією? (*Швидкість другого вертольота.*)

— Третьою дією? (*Швидкість першого вертольота.*)

- Четвертою дією? (*Час руху першого вертольота.*)
- Виконайте зміни в розв'язанні задачі.
- Складіть за цією таблицею задачу на одночасний рух назустріч.

Задача. З двох аеродромів, відстань між якими 4800 м, одночасно назустріч один одному вилетіли два вертольоти й через 15 хв зустрілися. За скільки хвилин може подолати відстань між аеродромами перший вертоліт, якщо другий вертоліт пролітає її за 24 хв?

— Як ця зміна вплине на розв'язання задачі? (*Розв'язання не зміниться. Треба виправити лише пояснення до третьої дії.*)

Отже, ці задачі на одночасний рух у протилежних напрямках мають таку математичну структуру та математичну модель:

	Загальний виробіток (або загальна відстань)	Продуктивність праці (або швидкість)	Час
I	A / S	?	?
II	A / S	?	t_2
I і II	A / S	?	?

Перший спосіб	Другий спосіб
	$t_2 = A : (A : t - A : t_2)$ $t_2 = S : (S : t - S : t_2)$
План розв'язання	
	1) знаходимо продуктивність спільної праці (на скільки змінюється відстань між тілами за одиницю часу); 2) знаходимо продуктивність праці (швидкість) другого об'єкта; 3) знаходимо продуктивність (швидкість) першого об'єкта; 4) знаходимо час роботи (руху) першого об'єкта

4. Розв'яжіть задачу на спільну роботу:

Задача. Майстер і учень виготовили 286 деталей за 11 робочих год. Скільки деталей може виготовити учень за 6 год роботи, якщо майстер за 2 год робить 42 деталі?

Робота над цією задачею здійснюється аналогічно. Після розв'язання учні перетворюють цю задачу в задачу на одночасний рух назустріч, а потім на одночасний рух у протилежних напрямках. З'ясовують, як вплине зміна формулювання на розв'язання задачі й узагальнюють математичну структуру та математичну модель задач на спільну роботу на знаходження загального виробітку одного з виконавців та задач на одночасний рух у різних напрямках на знаходження відстані, яку одне з тіл може подолати за певний час.

	Загальний виробіток (або загальна відстань)	Продуктивність праці (або швидкість)	Час
I	?	?	t_1
II	A / S	?	t_2
I і II	A / S	?	?

Перший спосіб	Другий спосіб
	$A_1 = (A : t - A_2 : t_2) \cdot t_1$ $S = (S : t - S_2 : t_2) \cdot t_1$
План розв'язання	
	1) знаходимо продуктивність спільної праці (на скільки змінюється відстань між тілами за одиницю часу); 2) знаходимо продуктивність праці (швидкість) другого об'єкта; 3) знаходимо продуктивність праці (швидкість) першого об'єкта; 4) знаходимо загальний виробіток (відстань) першого об'єкта при відповідному значенні часу

2.5. Методика навчання розв'язування задач на рух в одному напрямку

Теоретичною основою розробки методики формування в молодших школярів умінь розв'язувати задачі на одночасний рух в одному напрямку, так само як і для розробки методики навчання розв'язування задач на одночасний рух у різних напрямках, є теорія змістовних узагальнень В. В. Давидова. В основі будь-якого узагальнення, зокрема й змістовного, лежить порівняння. Слід зазначити, що порівняння сприяє встановленню більш глибоких зв'язків раніш вивченого й нового матеріалу, полегшує засвоєння знань, допомагає побачити аналогії.

Порівняння можна організувати по-різному — послідовно або паралельно, що, на думку А. Арт'ємова, суттєво впливає на результат навчання. Суть послідовного порівняння полягає в тому, що новий об'єкт порівнюють із раніше вивченим. Паралельне порівняння характеризується тим, що одночасно подаються декілька зразків, що відображають усі або найбільш типові варіанти, щоб на підставі їх порівняння зробити правильне узагальнення.

При використанні в навчанні послідовного й паралельного порівнянь гальмуються помилкові й закріплюються правильні тимчасові зв'язки, підвищується диференціація понять і правил, утворюються міцні асоціативні зв'язки за схожістю і контрастом.

Психологи встановили, що знання, подані в порівнянні, засвоюються ефективніше й запам'ятовуються міцніше. Тому цю методику розроблено на основі послідовного порівняння задач на одночасний

рух у різних напрямках та задач на одночасний рух в одному напрямку й паралельного порівняння задач на одночасний рух навздогін із задачами на одночасний рух із відставанням.

Під задачами на рух в одному напрямку розуміють задачі, у яких тіла рухаються одне відносно одного навздогін або з відставанням.

2.5.1. Підготовча робота до ознайомлення із задачами на одночасний рух в одному напрямку

На ступені підготовчої роботи учні повинні:

- 1) спостерігати за рухом двох тіл в одному напрямку;
- 2) усвідомити, що коли швидкість тіла, що рухається позаду, більша (менша) за швидкість тіла, що рухається попереду, то відбувається наближення (відставання) одного тіла до (від) іншого;
- 3) зробити висновок: знайти, на скільки зменшується (збільшується) відстань між тілами за одиницю часу, можна арифметичною дією віднімання.

Підготовча робота розпочинається з визначення характеру зміни певної величини за одиницю часу (кількості людей, об'єму води, маси вугілля), тобто величини, яка не пов'язана з рухом двох тіл одне відносно одного.

Задача 1. Порівняйте й розв'яжіть:

У кімнаті декілька людей. За кожну хвилину до кімнати заходять троє людей з одних дверей і двоє людей з інших. На скільки зміниться кількість людей у кімнаті за 1 хв? За 2 хв? Скільки людей буде в кімнаті через 5 хв, якщо спочатку в кімнаті було двоє людей?	У кімнаті декілька людей. За кожну хвилину до кімнати через перші двері заходять троє людей, а через інші — виходять двоє людей. на скільки зміниться кількість людей у кімнаті за 1 хв? За 2 хв? Скільки людей буде в кімнаті через 5 хв, якщо спочатку в кімнаті було двоє людей?
---	---

— Чим відрізняються розв'язання цих задач? (*У першій задачі на скільки збільшується кількість людей за 1 хв ми знаходимо дією додавання, а в другій — дією віднімання.*)

Задача 2. Порівняйте й розв'яжіть:

За останні декілька днів на автозаправку привозили по 7 т пального за день, а продавали щодня по 9 т пального. На скільки змінюється маса пального в резервуарі заправки за 1 день? За 3 дні? Якою вона стане через 7 днів, якщо на заправці спочатку було 18 т пального? На скільки днів вистачить пального на заправці при цьому режимі витрачання?	За останні декілька днів із резервуару одне підприємство брало по 7 т пального за день, а інше підприємство — по 9 т пального. На скільки змінюється маса пального в резервуарі за 1 день? За 3 дні? Якою вона стане через 7 днів, якщо спочатку було 192 т пального?
---	---

— Чим відрізняються розв'язання цих задач? (*У першій задачі на скільки зменшується маса пального за кожний день ми знаходимо дією віднімання, а в другій задачі — дією додавання.*)

Закріплення можна здійснити на таких задачах:

Задача 3. За годину через один кран у бак наливається 17 відер води, а через отвір виливається 8 відер води за кожну годину. На скільки змінюється об'єм води в баку? На скільки об'єм води змінюється за кожну годину? Скільки наллється води в бак через 3 год?

Задача 4. Надворі стояла бочка з водою. Пішов дощ... З водозбірної труби в бочку наливається 3 л води за кожну хвилину, а через дірку в бочці виливається 5 л за кожну хвилину. На скільки змінюється об'єм води в бочці? На скільки об'єм води в бочці змінюється за кожну хвилину? На скільки зміниться об'єм води в бочці за 3 хв?

Наступний етап підготовчої роботи стосується спостереження за рухом в одному напрямку двох тіл та ілюстрації напрямку руху на кресленні.

Після спостереження учнями руху в одному напрямку (*якщо швидкість тіла, що рухається позаду, більша або менша від швидкості тіла, що рухається попереду*) учні роблять такий висновок:

Якщо швидкість тіла, що рухається позаду, більша (менша) за швидкість тіла, що рухається попереду, то відстань між тілами весь час зменшується (збільшується). Перше тіло наздоганяє друге тіло (відстає від другого тіла).

Щоб закріпити цей висновок, дітям пропонують завдання на з'ясування умов, за яких одне діло наздоганяє інше (відстає від нього) або відстань між ними не змінюється.

Задача. Собака побігла за лисицею, яка знаходилася на відстані 120 м. Лисиця пробігає за хвилину 320 м. Чи зможе собака наздогнати лисицю, якщо пробігатиме 300 м за хвилину? Поясніть відповідь.

— З якою швидкістю повинна бігти собака, щоб відстань між нею і лисицею не змінювалася?

— Якою має бути швидкість собаки, щоб відстань між нею і лисицею скорочувалася?

— Чи наздожене собака лисицю, якщо пробігатиме за хвилину 350 м?

Далі учням пропонують завдання, які містять опис руху двох тіл в одному напрямку, щоб визначити характер зміни відстані між ними за одиницю часу й числове значення зміни відстані між тілами за одиницю часу.

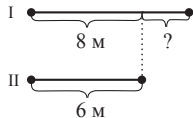
Задача. Хлопчики змагаються з бігу. Вони одночасно стартували. Швидкість першого хлопчика — $8 \frac{м}{с}$, а швидкість другого — $5 \frac{м}{с}$. На скільки змінюється відстань між ними? На скільки змінюється відстань між ними за кожну секунду?

Пояснюємо числа задачі. (Число 8 означає швидкість першого хлопчика, $8 \frac{м}{с}$ означає, що перший хлопчик за кожну секунду пробігає 8 м. Число 6 означає швидкість другого хлопчика, $6 \frac{м}{с}$ означає, що другий хлопчик за кожну секунду пробігає 6 м.)

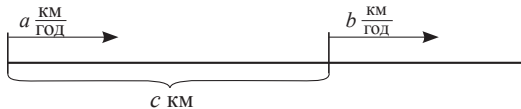
Робимо креслення:



За 1 с перший хлопчик пробігає 8 м, а другий — 6 м; 8 більше від 6, тому другий хлопчик відставатиме від першого. Щоб визначити, на скільки він буде відставати, треба від більшого числа відняти менше:

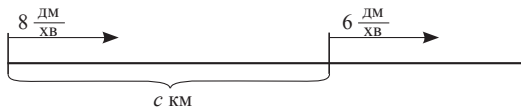


Також учні навчаються виконувати креслення в умовах руху в одному напрямку:



Для закріплення висновку корисні такі завдання:

1. Перша черепаха рухається за другою черепахою. Швидкість першої — $8 \frac{дм}{хв}$, швидкість другої — $6 \frac{дм}{хв}$. На скільки змінюється відстань між черепахами? На скільки змінюється відстань між черепахами за кожну хвилину?



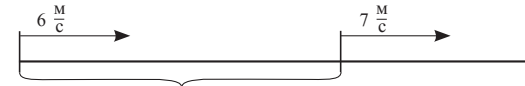
Розв'язання

Відстань між черепахами за кожну хвилину скорочується, тому що швидкість тієї черепахи, що рухається позаду, більша за швидкість черепахи, що рухається попереду.

Перша черепаха за кожну хвилину долає по 8 дм, а друга — по 6 дм. У той час, коли перша черепаха наблизилася до другої на 8 дм, друга від неї віддалилася на 6 дм. Але 8 дм більше за 6 дм, тому відстань між черепахами скорочується на: $8 - 6 = 2$ (дм).

Відповідь: відстань між черепахами скорочується на 2 дм за кожну хвилину.

2. Вітер зірвав із голови чоловіка капелюха. Чоловік побіг за своїм капелюхом. Чи наздожене чоловік власного капелюха, якщо вітер несе його зі швидкістю $7 \frac{м}{с}$, а чоловік біжить зі швидкістю $6 \frac{м}{с}$? На скільки змінюється відстань між чоловіком і його капелюхом за кожну секунду?



Розв'язання

Відстань між чоловіком і його капелюхом за кожну секунду збільшується, тому що швидкість чоловіка, а він рухається позаду, менша за швидкість капелюха, який несе вітер.

Чоловік за кожну хвилину долає 6 м, а капелюх — 7 м. У той час, коли чоловік наблизився до капелюха на 6 м, капелюх від нього віддалилася на 7 м. Але 6 м менше за 7 м, тому відстань між чоловіком і капелюхом збільшується на: $7 - 6 = 1$ (м).

Відповідь: відстань між чоловіком і капелюхом збільшується на 1 м за кожну хвилину.

Отже, на етапі підготовчої роботи діти ще навчаються виконувати креслення при одночасному русі в одному напрямку з різних пунктів.



Для подолання вузького узагальнення, слід пропонувати аналогічні завдання також на рух назустріч і в протилежних напрямках:

4. Танцюристи на ковзанах під час виконання парної ластівки з різних боків льодового стадіону почали рухатися одночасно назустріч один одному. Хлопчик рухається зі швидкістю $8 \frac{м}{с}$, а дівчинка зі швидкістю $7 \frac{м}{с}$. Як змінюється відстань між ними за кожну секунду?

5. Мисливець зустрів у лісі ведмедя. Обидва злякалися й побігли в протилежних напрямках. На скільки змінюється відстань між ними за кожну секунду, якщо ведмідь біжить зі швидкістю $3 \frac{м}{с}$, і мисливець зі швидкістю $3 \frac{м}{с}$?

6. Собака побігла за лисицею, яка знаходиться на відстані 120 м. Лисиця пробігає за хвилину 320 м, а собака 350 м. На скільки скоротиться відстань між ними через 1 хв?

— Яка відповідь буде в задачі, якщо лисиця бігтиме швидше на 10 м за хвилину?

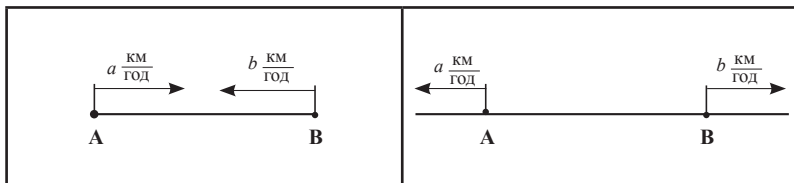
— Собака бігтиме швидше на 25 м за хвилину?

— Лисиця бігтиме швидше на 10 м, а собака на 25 м за хвилину?

Далі корисно порівняти задачі на рух назустріч та рух у протилежних напрямках та на рух наздогін та рух із відставанням і узагальнити міркування при визначенні того, на скільки змінюється відстань за одиницю часу.

Учням пропонують задачі з однаковими числовими даними, але з двома варіантами напрямку руху. При цьому учні роблять висновки, що при русі назустріч (у протилежних напрямках) відстань між тілами весь час зменшується (збільшується) на суму числових значень швидкостей цих тіл, а при русі наздогін (з відставанням) відстань між тілами весь час зменшується (збільшується) на різницю числових значень швидкостей цих тіл.

Задача. 3 пунктів А і В одночасно назустріч один одному (в протилежних напрямках) вирушили двоє вершників. Швидкість першого вершника — $a \frac{\text{км}}{\text{год}}$, а швидкість другого — $b \frac{\text{км}}{\text{год}}$.



— Як змінюється відстань між вершниками?

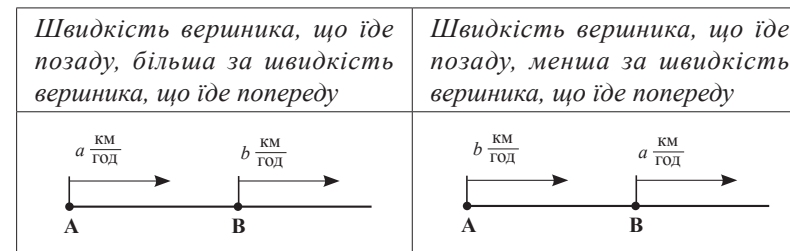
Якщо вони рухаються назустріч один одному, відстань між ними скорочується, вершники наближаються один до одного	Якщо вершники рухаються в протилежних напрямках, відстань між ними збільшується і вершники віддаляються один від одного
---	---

— На скільки кілометрів вершники наближаються (віддаляються) за кожну годину?

Вершники наближаються один до одного на $(a + b)$ км	Вершники віддаляються один від одного на $(a + b)$ км
--	---

Задача. 3 пунктів А і В одночасно в одному напрямку вирушили двоє вершників. Швидкість першого вершника — $a \frac{\text{км}}{\text{год}}$, швидкість другого — $b \frac{\text{км}}{\text{год}}$; причому $a > b$.

— Як могли рухатися вершники? (Могли бути два випадки.)



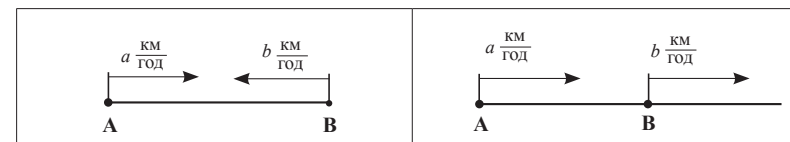
— Як змінюється відстань між вершниками?

Якщо вони рухаються наздогін, тобто швидкість вершника, що їде позаду, більша за швидкість вершника, що їде попереду, відстань між ними скорочується, вершники наближаються один до одного	Якщо вершники рухаються так, що швидкість вершника, що їде позаду, менша за швидкість вершника, що їде попереду, відстань між ними збільшується і вершники віддаляються один від одного
--	---

— На скільки кілометрів вершники наближаються (віддаляються) за кожну годину?

Вершники наближаються один до одного на $(a - b)$ км	Вершники віддаляються один від одного на $(a - b)$ км
--	---

Задача. 3 пунктів А і В одночасно назустріч один одному (наздогін) вирушили двоє вершників. Швидкість першого вершника — $a \frac{\text{км}}{\text{год}}$, а швидкість другого — $b \frac{\text{км}}{\text{год}}$; причому $a > b$.



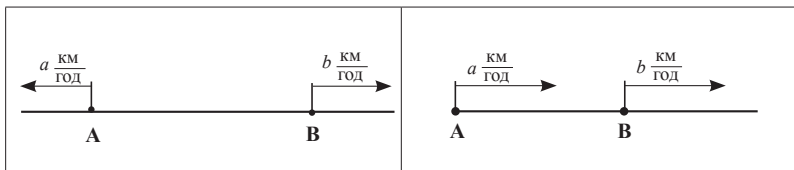
— Як змінюється відстань між вершниками?

В обох випадках відстань між вершниками скорочується, вони наближаються один до одного

— На скільки кілометрів вершники наближаються за кожну годину?

Вершники наближаються один до одного на $(a + b)$ км	Вершники наближаються один до одного на $(a - b)$ км
--	--

Задача. З пунктів А і В одночасно в протилежних напрямках (назустріч один одному) вирушили двоє вершників. Швидкість першого вершника — $a \frac{\text{км}}{\text{год}}$, а швидкість другого — $b \frac{\text{км}}{\text{год}}$, причому $b > a$.



— Як змінюється відстань між вершниками?

В обох випадках відстань між ними збільшується і вершники віддаляються один від одного

— На скільки кілометрів вершники віддаляються за кожну годину?

Вершники віддаляються один від одного на $(a + b)$ км	Вершники віддаляються один від одного на $(b - a)$ км
---	---

Учні роблять висновок: **при русі в різні боки (один бік) «на обидва змінюється відстань за одиницю часу» знаходять дією додавання (віднімання).**

Рух наздогін	Рух із відставанням
$a > b$	
$t - ?$ 	$t - ?$
Відстань між тілами за одиницю часу	
зменшується на:	збільшується на:
$(V_1 + V_2)$	

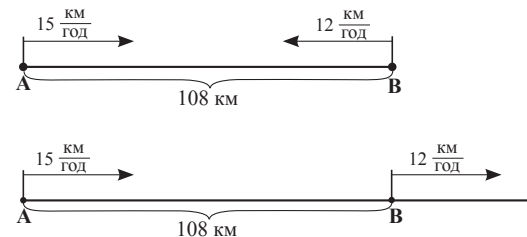
2.5.2. Ознайомлення із задачами на одночасний рух в одному напрямку

Ознайомлення учнів із задачами на рух в одному напрямку цілком побудовано на порівнянні відомих учням видів задач — на рух у різних напрямках (назустріч та в протилежних напрямках) із задачами нового виду.

Обидва види задач мають однакові способи знаходження відстані, часу та швидкості — і це учні усвідомлюють на підставі порівняння задач. Порівнюючи задачі, учні ще раз наголошують на відмінності в знаходженні числового значення зміни відстані за одиницю часу при русі в різних та в одному напрямку. Таким чином здійснюється послідовне порівняння. Результати послідовного порівняння узагальнені в буквеній формі.

Пропонуємо учням задачу, яка передбачає два варіанти напрямку руху — назустріч та навздогін.

Задача 1. Відстань між пунктами А і В 108 км. З цих пунктів одночасно назустріч (наздогін) один одному вирушили велосипедист і вершник. Швидкість вершника — $12 \frac{\text{км}}{\text{год}}$, а швидкість велосипедиста — $15 \frac{\text{км}}{\text{год}}$.



— На скільки кілометрів відстань скорочується за кожну годину?

Велосипедист і вершник наближаються один до одного за кожну годину на $(15 + 12)$ км	Велосипедист наближається до вершника за кожну годину на $(15 - 12)$ км
--	---

— У якому випадку відстань між велосипедистом і вершником скорочується більше? (Коли велосипедист і вершник рухаються назустріч один одному.)

— Чому в першому випадку відстань скорочується за 1 год більше? (Тому що ми це знаходимо дією додавання! Відстань при одночасному русі назустріч скорочується на суму відстаней, яку проходить кожне тіло за одиницю часу.)

— У якому випадку відстань між велосипедистом і вершником скорочується менше? (Коли велосипедист і вершник рухаються наздогін.)

— Чому в другому випадку відстань скорочується за 1 год менше? (Тому що ми це знаходимо дією віднімання! Відстань при одночасному русі наздогін скорочується на різницю відстаней, яку проходить кожне тіло за одиницю часу.)

— На скільки вони наблизяться (віддаляться) за 3 год?

Велосипедист і вершник наблизяться один до одного за 3 год на $(15 + 12) \cdot 3$ або $15 \cdot 3 + 12 \cdot 3$	Велосипедист наблизиться до вершника за 3 год на $(15 - 12) \cdot 3$ або $15 \cdot 3 - 12 \cdot 3$
---	--

Якою буде відстань між вершником і велосипедистом через 3 год?

$108 - (15 + 12) \cdot 3$ або $108 - (15 \cdot 3 + 12 \cdot 3)$	$108 - (15 - 12) \cdot 3$ або $108 - (15 \cdot 3 - 12 \cdot 3)$
---	---

— Через скільки годин вони опиняться разом?

— На скільки метрів вони повинні для цього наблизитися?

— На скільки метрів вони наближаються за кожну годину?

Велосипедист і вершник зустрінуться через $108 : (15 + 12)$	Велосипедист дожене вершника через $108 : (15 - 12)$
---	--

2.5.2.1. Задачі на знаходження часу з двома варіантами напрямку руху — назустріч та навздогін

Оскільки учні вміють розв'язувати задачі на знаходження часу при одночасному русі назустріч, то спочатку розв'язується ця задача. Після її розв'язання розглядається інший варіант руху — **навздогін**, — з'ясовується, як зміна напрямку вплине на розв'язання задачі. Відстань між тілами так само буде зменшуватися, але числове значення цієї зміни знаходять не додаванням, а відніманням, тому змінюється перша дія, а спосіб знаходження часу залишається тим самим.

Задача 2. Відстань між двома лижниками на момент початку руху становила 44 м. Вони почали рухатися одночасно назустріч (наздогін) один одному. Швидкість першого лижника — $12 \frac{\text{м}}{\text{хв}}$, а швидкість другого — $10 \frac{\text{м}}{\text{хв}}$. Через скільки хвилин вони будуть разом?

<p>Висновки: відстань між лижниками весь час зменшується; на рух вони витратили однаковий час; відстань, яка була між лижниками на момент початку руху, складається з відстані, яку подолав перший лижник, та відстані, яку подолав другий лижник.</p> <p>1) $12 + 10 = 22$ (м) — на стільки наближаються лижники один до одного за кожну годину;</p> <p>2) $44 : 22 = 2$ — через стільки хвилин лижники наблизяться один до одного.</p> <p>Перевірка.</p> <p>1) $12 \cdot 2 = 24$ (м) — на стільки наблизився перший лижник до другого за 2 хв;</p> <p>2) $10 \cdot 2 = 20$ (м) — на стільки наблизився другий лижник до першого за 2 хв;</p> <p>3) $20 + 24 = 44$ (м) — було між лижниками на момент початку руху.</p> <p>Відповідь: два лижники будуть разом через 5 хвилини</p>	<p>Висновки: відстань між лижниками весь час зменшується; на рух вони витратили однаковий час; відстань, яка була між лижниками на момент початку руху, дорівнює різниці відстані, яку подолав перший лижник, та відстані, яку подолав другий лижник.</p> <p>1) $12 - 10 = 2$ (м) — на стільки наближається перший лижник до другого за кожну годину;</p> <p>2) $44 : 2 = 22$ — через стільки хвилин перший лижник дожене другого.</p> <p>Перевірка.</p> <p>1) $12 \cdot 22 = 264$ (м) — на стільки наблизився перший лижник до другого за 22 хв;</p> <p>2) $10 \cdot 22 = 220$ (м) — на стільки віддалився другий лижник від першого за 22 хв;</p> <p>3) $264 - 220 = 44$ (м) — було між лижниками на момент початку руху.</p> <p>Відповідь: два лижники будуть разом через 22 хвилини</p>

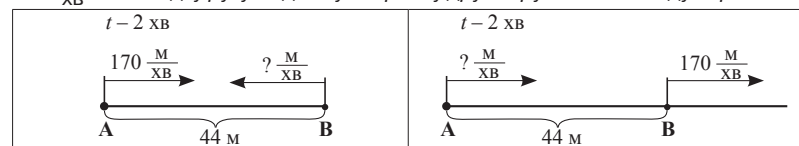
Узагальнюємо спосіб знаходження часу руху при одночасному русі в різних та в одному напрямку (**назустріч та навздогін**).

Одночасний рух назустріч $t = S : (V_1 + V_2)$	Одночасний рух наздогін $t = S : (V_1 - V_2)$

2.5.2.2. Задачі на знаходження швидкості одного з тіл із двома варіантами напрямку руху — назустріч та навздогін.

Працюємо над цією задачею аналогічно до попередньої. Розв'язавши задачу на одночасний рух назустріч, змінюємо напрямком руху і з'ясуємо, що перша дія не змінюється і ми так само, як у попередній задачі, знаходимо числове значення зміни відстані за одиницю часу, але змінюється друга дія — віднімання замінюється додаванням. У іншому способі розв'язання так само змінюється друга дія, і відповідно, змінюються числа в третій дії.

Задача 3. Відстань між двома чоловіками на момент початку руху була 600 м. Вони одночасно почали рухатися назустріч (наздогін) один одному й опинилися разом через 2 хв. Яка швидкість другого чоловіка, якщо швидкість першого — $170 \frac{м}{хв}$? У випадку руху в одному напрямку другий рухається позаду першого.



Висновки: відстань між чоловіками весь час зменшується; на рух вони витратили однаковий час — 2 хв; відстань, яка була між чоловіками на момент початку руху складається з відстані, яку подолав перший, та відстані, яку подолав другий.

Перший спосіб

1) $600 : 2 = 300$ (м) — на стільки зменшується відстань між чоловіками за кожну хвилину;

2) $300 - 170 = 130$ (м) — стільки долає за кожну хвилину другий чоловік, отже, його швидкість $130 \frac{м}{хв}$.

Другий спосіб

1) $170 \cdot 2 = 340$ (м) — стільки подолає перший за 2 хв;

2) $600 - 340 = 260$ (м) — стільки подолає другий за 2 хв;

3) $260 : 2 = 130$ ($\frac{м}{хв}$) — швидкість другого чоловіка.

Відповідь: швидкість другого чоловіка $130 \frac{м}{хв}$

Висновки: відстань між чоловіками весь час зменшується; на рух вони витратили однаковий час — 2 хв; відстань, яка була між чоловіками на момент початку руху, дорівнює різниці відстані, яку подолав перший, та відстані, яку подолав другий.

Перший спосіб

Якщо другий наздожене першого за 2 хв, то його швидкість буде більша, ніж швидкість першого — $170 \frac{м}{хв}$.

$600 : 2 = 300$ (м) — на стільки скорочується відстань між чоловіками за кожну хвилину;

$300 + 170 = 470$ (м) — стільки повинен долати другий чоловік за кожну хвилину, отже, швидкість другого — $470 \frac{м}{хв}$.

Другий спосіб

1) $170 \cdot 2 = 340$ (м) — на стільки відділиться перший чоловік від другого за 2 хв;

2) $600 + 340 = 940$ (м) — на стільки метрів повинен наблизитися другий до першого за 2 хв;

3) $940 : 2 = 470$ ($\frac{м}{хв}$) — швидкість другого.

Відповідь: швидкість другого чоловіка $470 \frac{м}{хв}$

Узагальнюємо способи знаходження швидкості при одночасному русі назустріч та навздогін.

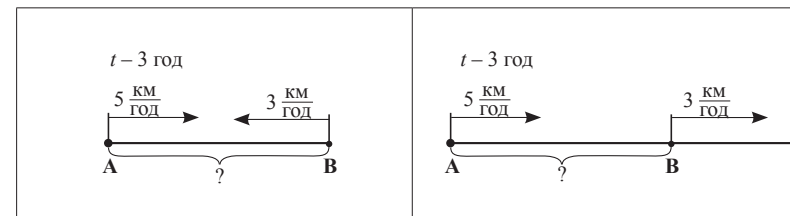
Одночасний рух назустріч	Одночасний рух навздогін
<p>Перший спосіб</p> $V_1 = S : t - V_2$ <p>Другий спосіб</p> $V_1 = (S - V_2 \cdot t) : t$	<p>Перший спосіб</p> $V_1 = S : t + V_2$ <p>Другий спосіб</p> $V_1 = (S + V_2 \cdot t) : t$

2.5.2.3. Задачі на знаходження відстані між тілами на момент початку руху з двома варіантами напрямку руху — назустріч та навздогін

Робота над задачею відбувається аналогічно до попередньої.

Зміна напрямку руху впливає на першу дію, тому що числове значення зміни відстані за одиницю часу при русі навздогін знаходять не додаванням, а відніманням, тому треба замінити одне з чисел у останній — другій дії. При розв'язанні задачі трьома діями змінюється остання дія — додавання замінюється відніманням.

Задача 4. Двоє пішоходів почали рухатися одночасно назустріч (наздогін). Якою була відстань між ними на момент початку руху, якщо вони опинилися разом через 3 год, причому перший ішов зі швидкістю $5 \frac{км}{год}$, а другий — зі швидкістю $3 \frac{км}{год}$?



<p>Висновки: відстань між пішоходами весь час зменшується; на рух вони витратили однаковий час — 3 год; відстань, яка була між пішоходами на момент початку руху, складається з відстані, яку подолав перший, та відстані, яку подолав другий. Перший спосіб 1) $5 + 3 = 8$ (км) — на стільки зменшується відстань між чоловіками за кожну годину; 2) $8 \cdot 3 = 24$ (км) — на стільки скоротиться відстань між чоловіками за 3 год, така відстань на момент початку руху. Другий спосіб 1) $5 \cdot 3 = 15$ (км) — стільки подолає перший за 3 год; 2) $3 \cdot 3 = 9$ (км) — стільки подолає другий за 3 год; 3) $15 + 9 = 24$ (км) — подолали разом обидва чоловіки, відстань на момент початку руху. Відповідь: відстань між ними на момент початку руху 24 км</p>	<p>Висновки: відстань між пішоходами весь час зменшується; на рух вони витратили однаковий час — 3 год; відстань, яка була між пішоходами на момент початку руху, дорівнює різниці відстані, яку подолав перший, та відстані, яку подолав другий. Перший спосіб 1) $5 - 3 = 2$ (км) — на стільки скорочується відстань між чоловіками за кожну годину; 2) $2 \cdot 3 = 6$ (км) — на стільки скоротиться відстань між чоловіками за 3 год, така відстань на момент початку руху. Другий спосіб 1) $5 \cdot 3 = 15$ (км) — на стільки наблизиться перший до другого за 3 год; 2) $3 \cdot 3 = 9$ (км) — на стільки віддалиться другий чоловік від першого за 3 год; 3) $15 - 9 = 6$ (км) — на стільки скоротиться відстань між першим та другим чоловіками за 3 год, така відстань була між ними на момент початку руху. Відповідь: відстань між ними на момент початку руху 6 км.</p>
---	---

Узагальнюємо способи знаходження **відстані між тілами на момент початку одночасного руху назустріч чи навздогін.**

Одночасний рух назустріч	Одночасний рух навздогін
<p>Перший спосіб $S = (a + b) \cdot t$ Другий спосіб $S = a \cdot t + b \cdot t$</p>	<p>Перший спосіб $S = (a - b) \cdot t$ Другий спосіб $S = a \cdot t - b \cdot t$</p>

Отже, на основі послідовного порівняння задач на одночасний рух назустріч та на одночасний рух навздогін, визначено способи знаходження часу зустрічі, швидкості одного з тіл та відстані на момент

початку руху, якщо тіла рухаються в одному напрямку та одне тіло наближається до другого.

Тепер існує можливість розглянути задачі на рух навздогін та з відставанням на основі паралельного порівняння.

2.5.2.4. Задачі на знаходження відстані на рух в одному напрямку, але за двома варіантами — навздогін та з відставанням

Задача 4. Двоє велосипедистів знаходяться на відстані 240 м один від одного. Швидкість першого велосипедиста — $5 \frac{M}{C}$, а швидкість другого — $3 \frac{M}{C}$. Вони почали рухатися одночасно в одному напрямку. Якою буде відстань між ними через 30 с, якщо вони рухаються так, що:

- перший їде за другим;
- другий їде за першим?

Спочатку розв'язується задача на рух навздогін. При першому способі учні визначають характер і числове значення зміни відстані за одиницю часу, з'ясовуємо числове значення зміни відстані за даний в умові задачі час, і потім — про відстань, яку залишилося обом тілам подолати до зустрічі.

При другому способі першою дією визначаємо, на скільки наближається одне тіло до другого за даний час, другою дією — яку відстань залишилося скоротити першому, щоб дістатися до другого, третьою дією — на скільки віддаляється друге тіло від першого за даний час, четвертою дією — відстань між тілами через даний час.

Далі відбувається зміна напрямку тіл: тепер друге тіло рухається за першим, відбувається рух із відставанням. З'ясовуємо, як ця зміна впливає на розв'язання задачі: у першому способі змінюється остання дія — віднімання замінюється додаванням; а другий спосіб майже не змінився — помінялися місцями числові значення швидкості в першій і третій діях.

Швидкість велосипедиста, що їде позаду, більша за швидкість велосипедиста, що їде попереду. Тому відстань між велосипедистами весь час буде зменшуватися	Швидкість велосипедиста, що їде позаду, менша за швидкість велосипедиста, що їде попереду. Тому відстань між велосипедистами весь час буде збільшуватися

<p>Перший спосіб</p> <p>1) $5 - 3 = 2$ (м) — на стільки зменшується відстань за кожну секунду; 2) $2 \cdot 30 = 60$ (м) — на стільки зменшиться відстань за 30 с; 3) $240 - 60 = 180$ (м) буде між велосипедистами через 30 с.</p> <p>Другий спосіб</p> <p>1) $5 \cdot 30 = 150$ (м) — на стільки наблизиться перший велосипедист до другого за 30 с; 2) $240 - 150 = 90$ (м) — стільки залишиться від першого велосипедиста до другого; 3) $3 \cdot 30 = 90$ (м) — на стільки віддалиться другий від першого за 30 с; 4) $90 + 90 = 180$ (м) буде між велосипедистами за 30 с.</p> <p>Відповідь: 180 м буде між велосипедистами через 30 с</p>	<p>Перший спосіб</p> <p>1) $5 - 3 = 2$ (м) — на стільки збільшується відстань за кожну секунду; 2) $2 \cdot 30 = 60$ (м) — на стільки збільшиться відстань за 30 с; 3) $240 + 60 = 300$ (м) буде між велосипедистами через 30 с.</p> <p>Другий спосіб</p> <p>1) $3 \cdot 30 = 90$ (м) — на стільки наблизиться другий велосипедист до першого за 30 с; 2) $240 - 90 = 150$ (м) — стільки залишиться від другого велосипедиста до першого; 3) $5 \cdot 30 = 150$ (м) — на стільки віддалиться перший від другого за 30 с; 4) $150 + 150 = 300$ (м) буде між велосипедистами за 30 с.</p> <p>Відповідь: 300 м буде між велосипедистами через 30 с</p>
--	--

Узагальнюємо способи знаходження *відстані між тілами через певний час спільного руху при одночасному русі навздогін та з відставанням.*

Одночасний рух навздогін	Одночасний рух з відставанням
$V_1 > V_2$	
<p>Перший спосіб</p> $S_p = S - (V_1 - V_2) \cdot t$ <p>Другий спосіб</p> $S_p = S - V_1 \cdot t + V_2 \cdot t$	<p>Перший спосіб</p> $S_p = S + (V_1 - V_2) \cdot t$ <p>Другий спосіб</p> $S_p = S - V_2 \cdot t + V_1 \cdot t$

Складання й розв'язання оберненої задачі 5 на знаходження відстані на момент початку руху до задачі 4 (с.101)

Учні пояснюють числа задачі 4 до кожного варіанта руху і складають, відповідно, дві обернені задачі на знаходження відстані на момент початку руху.

— Поясніть числа **задач**.

Прямі задачі	
5, 3, 240, 30, ?	5, 3, 240, 30, ?

— Складіть і розв'яжіть обернені задачі на знаходження відстані, яка була на момент початку руху.

Обернені задачі	
5, 3, ?, 30, 180	5, 3, ?, 30, 300

Робота відбувається аналогічно.

Спочатку розв'яжемо задачу на рух навздогін.

Задача 5. Двоє велосипедистів почали рухатися одночасно в одному напрямі. Швидкість першого велосипедиста — $5 \frac{M}{C}$, а швидкість другого — $3 \frac{M}{C}$. Яка була відстань на момент початку руху, якщо через 30 с після початку руху відстань між ними становила:

- 180 м, причому перший їде за другим;
- 300 м, причому другий їде за першим?

Швидкість велосипедиста, що їде позаду, більша за швидкість велосипедиста, що їде попереду. Тому відстань між велосипедистами весь час буде зменшуватися	Швидкість велосипедиста, що їде позаду, менша за швидкість велосипедиста, що їде попереду. Тому відстань між велосипедистами весь час буде збільшуватися
<p>1) $5 - 3 = 2$ (м) — на стільки зменшується відстань за кожну секунду; 2) $2 \cdot 30 = 60$ (м) — на стільки зменшиться відстань за 30 с; 3) $180 + 60 = 240$ (м) — було на момент початку руху</p> <p>Відповідь: 240 м було між велосипедистами на початок руху</p>	<p>1) $5 - 3 = 2$ (м) — на стільки зменшується відстань за кожну секунду; 2) $2 \cdot 30 = 60$ (м) — на стільки зменшиться відстань за 30 с; 3) $180 + 60 = 240$ (м) — було на момент початку руху</p> <p>Відповідь: 240 м було між велосипедистами на початок руху</p>

Узагальнюємо спосіб знаходження *відстані між тілами на момент початку руху при одночасному русі навздогін та з відставанням.*

Одночасний рух наздогін	Одночасний рух з відставанням
$V_1 > V_2$	
$S = S_1 + (V_1 - V_2) \cdot t$	$S = S_1 - (V_1 - V_2) \cdot t$

2.5.2.5. Задачі на знаходження швидкості одного з тіл, на рух в одному напрямку, але за двома варіантами — наздогін та з відставанням

Складання й розв'язання оберненої задачі на знаходження швидкості одного з тіл до задачі 4 (с.101)

Складіть і розв'яжіть обернені задачі на знаходження швидкості.

Обернені задачі	
?, 3, 240, 30, 180	?, 3, 240, 30, 300

Задача 6. Двоє велосипедистів знаходяться на відстані 240 м один від одного. Яка швидкість першого велосипедиста, якщо швидкість другого велосипедиста — $3 \frac{M}{C}$? Вони почали рухатися одночасно в одному напрямі, причому:

- перший їде за другим та через 30 с після початку руху відстань між ними становила 180 м;
- другий їде за першим та через 30 с після початку руху відстань між ними становила 300 м.

Швидкість велосипедиста, що їде позаду, більша за швидкість велосипедиста, що їде попереду. Тому відстань між велосипедистами весь час буде зменшуватися	Швидкість велосипедиста, що їде позаду, менша за швидкість велосипедиста, що їде попереду. Тому відстань між велосипедистами весь час буде збільшуватися

1) $240 - 180 = 60$ (м) — на стільки зменшилася відстань між велосипедистами за 30 с; 2) $3 \cdot 30 = 90$ (м) — на стільки віддалився другий велосипедист від першого за 30 с; 3) $90 + 60 = 150$ (м) — на стільки наблизився перший велосипедист до другого за 30 с; 4) $150 : 30 = 5 (\frac{M}{C})$ — швидкість першого велосипедиста.	1) $300 - 240 = 60$ (м) — на стільки збільшилася відстань між велосипедистами за 30 с; 2) $3 \cdot 30 = 90$ (м) — на стільки відстав другий велосипедист від першого за 30 с; 3) $60 + 90 = 150$ (м) — на стільки віддалився перший велосипедист від другого за 30 с; 4) $150 : 30 = 5 (\frac{M}{C})$ — швидкість першого велосипедиста.
Відповідь: швидкість першого велосипедиста $5 \frac{M}{C}$	Відповідь: швидкість першого велосипедиста $5 \frac{M}{C}$

Узагальнюємо спосіб знаходження швидкості одного з тіл при одночасному русі наздогін та з відставанням.

Одночасний рух наздогін	Одночасний рух з відставанням
$V_1 > V_2$	
$v_1 = (s - s_p + v_2 \cdot t) : t$	$V_1 = (S_p - S + V_2 \cdot t) : t$

2.5.2.6. Задачі на знаходження часу спільного руху за двома варіантами — наздогін та з відставанням

Складання й розв'язання оберненої задачі на знаходження часу спільного руху до задачі 4 (с.101)

— Складіть і розв'яжіть обернені задачі на знаходження часу.

Обернені задачі	
5, 3, 240, ?, 180	5, 3, 240, ?, 300

Задача 7. Двоє велосипедистів знаходяться на відстані 240 м один від одного. Швидкість першого велосипедиста — $5 \frac{M}{C}$, а швидкість другого велосипедиста — $3 \frac{M}{C}$. Через скільки секунд відстань між ними становитиме:

- 180 м, причому перший їде за другим;
- 300 м, причому другий їде за першим?

Швидкість велосипедиста, що їде позаду, більша за швидкість велосипедиста, що їде попереду. Тому відстань між велосипедистами весь час буде зменшуватися	Швидкість велосипедиста, що їде позаду, менша за швидкість велосипедиста, що їде попереду. Тому відстань між велосипедистами весь час буде збільшуватися
1) $5 - 3 = 2$ (м) — на стільки зменшується відстань між велосипедистами за кожну секунду; 2) $240 - 180 = 60$ (м) — на стільки зменшилася відстань між велосипедистами за 30 с; 3) $60 : 2 = 30$ — за стільки секунд відстань між велосипедистами зменшилася на 60 м.	1) $5 - 3 = 2$ (м) — на стільки збільшується відстань між велосипедистами за кожну секунду; 2) $300 - 240 = 60$ (м) — на стільки збільшилася відстань між велосипедистами за 30 с; 3) $60 : 2 = 30$ — за стільки секунд відстань між велосипедистами збільшилася на 60 м.
Відповідь: відстань між велосипедистами становила 180 м через 30 с	Відповідь: відстань між велосипедистами становила 300 м через 30 с

Узагальнюємо спосіб знаходження часу спільного руху при одночасному русі навздогін та з відставанням.

Одночасний рух навздогін	Одночасний рух з відставанням
$V_1 > V_2$	
$t = (S - S_p) : (V_1 - V_2)$	$t = (S_p - S) : (V_1 - V_2)$

2.5.3. Формування вміння розв'язувати задачі на одночасний рух в одному напрямку

Обов'язковими елементами при роботі над задачами на цьому етапі є визначення характеру зміни відстані між тілами за одиницю часу, числового значення цієї зміни — це ключ до розв'язання задачі. Якщо учні не пам'ятають способу розв'язання, то виконується аналітичний або синтетичний пошук розв'язування задачі.

На етапі роботи над задачею після її розв'язання діти складають і розв'язують обернені задачі, або змінюють порядок напрямку тіл і розв'язують отриману задачу.

Задача. Бабуся Шапокляк біжить за Чебурашкою. Зараз між ними відстань 1100 м. Швидкість Шапокляк — $120 \frac{м}{хв}$, а швидкість Чебурашки — $100 \frac{м}{хв}$. Чи наздожене Шапокляк Чебурашку? Через скільки годин?

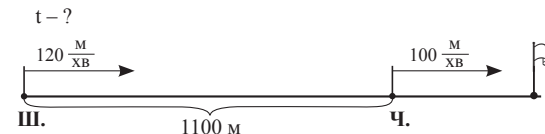
— Про що йдеться в задачі? (Про рух Шапокляк та Чебурашки.)

— Що відомо про час початку руху? (Вони вирушили одночасно.)

— Як вони рухаються? (Шапокляк біжить за Чебурашкою. Вони рухаються в одному напрямку.)

— Які висновки можна зробити при русі в одному напрямку? (Швидкість Шапокляк більша за швидкість Чебурашки, тому відстань між ними буде весь час зменшуватися. На рух вони витратять однаковий час.)

Зробимо креслення.



— За коротким записом поясніть числа задачі. (Число 120 означає швидкість Шапокляк. $120 \frac{м}{хв}$ означає, що Шапокляк за кожну хвилину пробігає 120 м. Число 100 означає швидкість Чебурашки. $100 \frac{м}{хв}$ означає, що кожний хвилину Чебурашка пробігає по 100 м. Число 1100 відстань між ними на момент початку руху. Треба знайти час зустрічі. Вони зустрінуться тоді, коли відстань між ними скоротиться до 0.)

— Що треба знати, щоб відповісти на запитання задачі? (Треба знати два числові значення: відстань, яка була між ними на момент початку руху, відомо — 1100 м; відстань, на яку зменшується відстань між Шапокляк та Чебурашкою за кожну хвилину, невідомо.)

— Якою арифметичною дією відповімо на запитання задачі? (Дією ділення.)

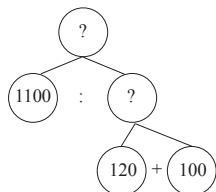
— Чи можна відразу відповісти на запитання задачі? (Ні, ми не знаємо, на скільки зменшується відстань між Шапокляк та Чебурашкою за кожну хвилину.)

— Що для цього варто знати? (Слід знати два числові значення: на скільки наближається за кожну хвилину Шапокляк до Чебурашки,

відомо — на 120 м; на скільки віддаляється Чебурашка від Шапокляк за кожну хвилину, відомо — на 100 м.)

— Якою арифметичною дією дамо відповідь на це запитання? (Дією додавання.)

— Чи можна відразу відповісти на це запитання. (Так, ми від запитання перейшли до числових даних. Аналіз закінчено.)



— Складіть план розв'язування задачі. (Першою дією визначаємо, на скільки зменшується між Шапокляк та Чебурашкою за кожну хвилину. Другою дією — через скільки хвилин Шапокляк наздожене Чебурашку.)

— Запишіть розв'язання задачі виразом.

Розв'язання:

$$1100 : (120 - 100) = 55 \text{ (хв.)}$$

Відповідь: через 55 хв Шапокляк наздожене Чебурашку.

Учням також пропонують дещо ускладнені задачі на рух в одному напрямку, причому ускладнення відбувається за рахунок:

- зміни швидкості тіла, що рухається попереду, через певний час спільного руху двох тіл, при русі наздогін;
- неодновременного початку руху двох тіл з одного пункту;
- продовження руху наздогін після того, як тіло, що рухалося позаду, опинилося поруч із тілом, що рухалося попереду;
- введення різницевого або кратного відношення швидкостей двох тіл.

2.6. Зіставлення задач на спільну роботу, у яких продуктивність спільної праці знаходять дією віднімання, із задачами на рух в одному напрямку

Учням пропонують для розв'язання пари задач з однаковими числовими даними, але перша задача — на рух наздогін, а друга — на спільну роботу.

— Запишіть кожну задачу коротко у формі таблиці й порівняйте їх:

- 1.** З двох станцій виїхали одночасно пасажирський і товарний поїзд в одному напрямку. Пасажирський поїзд ішов за товарним. Пасажирський поїзд рухався зі швидкістю $70 \frac{\text{км}}{\text{год}}$, а товарний — $50 \frac{\text{км}}{\text{год}}$. Яка відстань між станціями, якщо пасажирський наздогнав товарний через 7 год?
- 2.** Через кран у бак вливається 70 відер води за кожну годину, а через зливний отвір виливається 50 відер води за кожну годину. Скільки відер води наллється в бак, якщо і кран, і зливний отвір будуть відкриті?

	Відстань	Швидкість ($\frac{\text{км}}{\text{год}}$)	Час (год)		Загальний виробіток	Продуктивність праці (в.)	Час роботи (год)
I		70	7	К.		70	7
II		50		О.		50	
I і II	?	?		К. і О.	?	?	

— Що спільного в задачах? (У них спільні числові дані. У першій задачі число 7 означає час спільного руху, доки поїзди не опинилися поруч, а в другій — час спільної праці. У першій задачі число 70 означає швидкість пасажирського потяга, а в другій — продуктивність крана. У першій задачі число 50 означає швидкість товарного потяга, а в другій — продуктивність зливного отвору. У першій задачі шукаємо є відстань на момент початку руху, тобто відстань, яку подолали разом обидва потяги, рухаючись навздогін; а в другій — загальний виробіток при спільній праці крана і зливного отвору.)

— Розв'яжіть кожну задачу двома способами.

Перший спосіб	Перший спосіб
1) $70 \cdot 7 = 490$ (км) — відстань, яку подолав пасажирський потяг за 7 год — на стільки наблизився пасажирський потяг до товарного за 7 год;	1) $70 \cdot 7 = 490$ (в.) води налилося через кран за 7 год — загальний виробіток крана за 7 год;
2) $50 \cdot 7 = 350$ (км) — відстань, яку подолав товарний потяг за 7 год — на стільки віддалився товарний потяг від пасажирського за 7 год;	2) $50 \cdot 7 = 350$ (в.) води вилилося через зливний отвір за 7 год — загальний виробіток зливного отвору за 7 год;
3) $490 - 350 = 140$ (км) — на стільки кілометрів скоротилася відстань між потягами за 7 год — відстань, яка була на момент початку руху.	3) $490 - 350 = 140$ (в.) води залишилося в баку за 7 год — загальний виробіток крана і зливного отвору при їх спільній роботі.
$70 \cdot 7 - 50 \cdot 7 = 140$ (км)	$70 \cdot 7 - 50 \cdot 7 = 140$ (в.)

Другий спосіб	Другий спосіб
1) $70 - 50 = 20$ (км) — на стільки зменшується відстань між потягами за 1 год;	1) $70 - 50 = 20$ (в.) води залишається в баку за кожну годину — продуктивність спільної праці;
2) $20 \cdot 7 = 140$ (км) — на стільки зменшилася відстань між потягами за 7 год, така відстань між станціями.	2) $20 \cdot 7 = 140$ (в.) води залишається в баку за 7 год — загальний виробіток при спільній праці.
$(70 - 50) \cdot 7 = 140$ (км)	$(70 - 50) \cdot 7 = 140$ (в.)

— Порівняйте перші способи розв’язання цих задач. (Арифметичні дії ті самі, але різні пояснення.)

— Що в обох задачах ми визначили першою дією? (Відстань або загальний виробіток першого об’єкта.)

— Другою дією? (Відстань або загальний виробіток другого об’єкта.)

— Третьою дією? (Відстань між тілами на момент початку руху або загальний виробіток обох об’єктів.)

— Порівняйте другі способи розв’язання. (Арифметичні дії ті самі, але різні пояснення.)

— Що в обох задачах ми визначили першою дією? (Числове значення зміни відстані між тілами за 1 год або продуктивність спільної праці.)

— Другою дією? (Числове значення зміни відстані між тілами за весь час руху, відстань або загальний виробіток при спільній праці.)

— Що можна сказати про вирази, які є розв’язками цих задач? (Вирази однакові.)

Задача на знаходження відстані між тілами на момент початку руху при одночасному русі навздогін і задача на знаходження загального виробітку спільної роботи мають однакові математичні моделі.

	Загальний виробіток (або загальна відстань)	Продуктивність праці (або швидкість)	Час
I		N_1 / V_1	
II		N_2 / V_2	
I і II	?	?	t
Перший спосіб		Другий спосіб	
$A = N_1 \cdot t - N_2 \cdot t$ $S = V_1 \cdot t - V_2 \cdot t$		$A = (N_1 - N_2) \cdot t$ $S = (V_1 - V_2) \cdot t$	
План розв’язання			
1) знаходимо загальний виробіток (відстань) першого об’єкта для даного значення часу;		1) знаходимо продуктивність спільної праці (на скільки змінюється відстань між тілами за одиницю часу);	
2) знаходимо загальний виробіток (відстань) другого об’єкта для даного значення часу;		2) знаходимо загальний виробіток при спільній праці (на скільки змінюється відстань між тілами за час їх спільного руху)	
3) знаходимо загальний виробіток (відстань) першого та другого об’єктів при їх спільній праці (спільному русі)			

Аналогічно можна узагальнити математичні структури й способи розв’язування задач на знаходження відстані між тілами на момент початку руху при одночасному русі навздогін або назустріч та на знаходження загального виробітку, якщо продуктивність спільної праці знаходять відніманням або додаванням.

	Загальний виробіток (або загальна відстань)	Продуктивність праці (або швидкість)	Час
I		N_1 / V_1	t
II		N_2 / V_2	
I і II	?	?	
Перший спосіб		Другий спосіб	
$A = N_1 \cdot t \pm N_2 \cdot t$ $S = V_1 \cdot t \pm V_2 \cdot t$		$A = (N_1 \pm N_2) \cdot t$ $S = (V_1 \pm V_2) \cdot t$	
План розв’язання			
1) знаходимо загальний виробіток (відстань) першого об’єкта для даного значення часу;		1) знаходимо продуктивність спільної праці (на скільки змінюється відстань між тілами за одиницю часу);	
2) знаходимо загальний виробіток (відстань) другого об’єкта для даного значення часу;		2) знаходимо загальний виробіток при спільній праці (на скільки змінюється відстань між тілами за час їх спільного руху)	
3) знаходимо загальний виробіток (відстань) першого та другого об’єктів при їх спільній праці (спільному русі)			

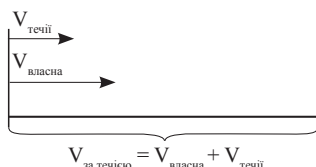
Аналогічно у результаті зіставлення задач на спільну роботу на знаходження часу спільної праці, у яких продуктивність спільної праці являє собою різницю продуктивностей виконавців, із задачами на одночасний рух навздогін на знаходження часу, через який одне тіло опиниться поруч з іншим, відбувається узагальнення математичних структур та способів розв’язування задач на знаходження часу при одночасному русі наздогін та задач на знаходження часу спільної праці.

	Загальний виробіток (або загальна відстань)	Продуктивність праці (або швидкість)	Час
I		N_1 / V_1	?
II		N_2 / V_2	
I і II	A / S	?	
Перший спосіб		Другий спосіб	
		$t = A : (N_1 - N_2)$ $t = S : (V_1 - V_2)$	
План розв’язання			
		1) знаходимо продуктивність спільної праці (на скільки змінюється відстань між тілами за одиницю часу);	
		2) знаходимо час спільної праці (спільного руху)	

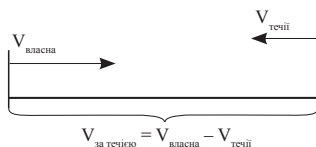
2.7. Задачі на рух за течією та проти течії річки

Серед задач на рух виокремлюють задачі на рух за течією та проти течії річки. Ці задачі опираються на поняття: власна швидкість катера ($V_{\text{власна}}$), швидкість течії річки ($V_{\text{течії}}$), швидкість катера за течією річки ($V_{\text{за течією}}$) та швидкість катера проти течії річки ($V_{\text{проти течії}}$). Отже, ці поняття слід ввести, ознайомити учнів із відповідними формулами та показати, як виконуються креслення до подібних задач. Ознайомити учнів із цими поняттями можна за допомогою спостереження за рухом маленького паперового кораблика в річці.

Якщо кораблик пливе за течією річки, то течія йому допомагає, підштовхує, тому його швидкість збільшується:



Якщо кораблик пливе проти течії річки, то течія йому перешкоджає, гальмує, тому його швидкість зменшується:



Під час спостереження учні роблять такі **висновки**:

- при русі катера за течією річки, течія ніби підштовхує катер, і його швидкість збільшується на швидкість течії;
- при русі проти течії річки, течія заважає руху катера, його швидкість зменшується на швидкість течії.

Шуканим у задачах на рух за течією та проти течії річки може бути:

- час руху за течією або проти течії річки;
- відстань;
- швидкість течії річки;
- власна швидкість катеру.

Задача. Відстань між двома пристанями по річці 180 км. За який час катер пройде цю відстань туди й назад, якщо швидкість катера в стоячій воді — $15 \frac{\text{км}}{\text{год}}$, а швидкість течії річки — $3 \frac{\text{км}}{\text{год}}$?

— Про що йдеться в задачі? (Про рух катера в стоячій воді, за течією та проти течії річки.)

Отже, можна цю задачу розбити на три частини:

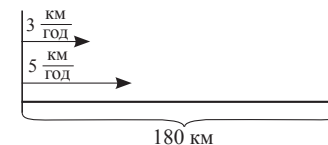
- розглянути рух катера за течією річки;
- розглянути рух катера проти течії річки;
- відповідно до другої та першої частин відповісти на перше запитання задачі.

— Які висновки можна зробити?

- При русі катера за течією річки, течія ніби підштовхує катер, і його швидкість збільшується на швидкість течії.
- При русі проти течії річки, течія заважає руху катера, його швидкість зменшується на швидкість течії.

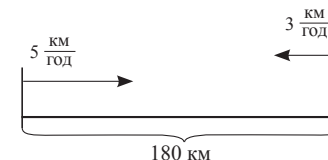
Зробимо креслення.

1. Рух катера за течією:



— За коротким записом поясніть числа задачі. (Число 15 означає власну швидкість катера. $15 \frac{\text{км}}{200}$ означає, що катер, якщо його двигун працює, за кожну годину проходить по 15 км.)

2. Рух катера проти течії:



Число 3 означає швидкість течії річки. $3 \frac{\text{км}}{\text{год}}$ означає, якщо вимкнути двигун катера, то він рухатиметься тільки за течією, долаючи за кожну годину по 3 км. Число 180 означає відстань між пристанями.

— Назвіть запитання задачі. (За який час катер пройде цю відстань туди й назад?)

— Що треба знати, щоб на нього відповісти? (Слід знати два числові значення: час руху катера за течією, невідомо; час руху катера проти течії річки.)

— Якою арифметичною дією дамо відповідь на запитання задачі? (Дією додавання.)

— Чи можна відразу відповісти на запитання задачі? (Ні, ми не знаємо обидва числові значення.)

— Що варто знати, щоб визначити час руху катера за течією? (Слід знати два числові значення: відстань, яку пройшов катер за течією, відомо — 180 км; швидкість катера за течією, невідомо.)

— Якою арифметичною дією дамо відповідь на це запитання? (Дією ділення.)

— Чи можна одразу відповісти на це запитання? (Ні, невідома швидкість катера за течією річки.)

— Що для цього варто знати? (Слід знати два числові значення: власну швидкість катера, відомо — $15 \frac{\text{км}}{\text{год}}$; швидкість течії річки, відомо — $3 \frac{\text{км}}{\text{год}}$.)

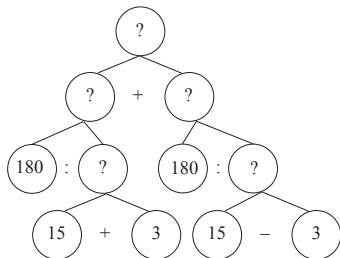
— Якою арифметичною дією дамо відповідь на це запитання? (Дією додавання.)

— Чи можна тепер відповісти на запитання задачі? (Ні, ми не знаємо час руху катера проти течії річки.)

— Що для цього варто знати? (Слід знати два числові значення: власну швидкість катера, відомо — $15 \frac{\text{км}}{\text{год}}$; швидкість течії річки, відомо — $3 \frac{\text{км}}{\text{год}}$.)

— Якою арифметичною дією дамо відповідь на це запитання? (Дією віднімання.)

— Чи можна тепер відповісти на запитання задачі? (Так, ми від запитання перейшли до числових даних. Аналіз закінчено.)



— Складіть план розв'язування задачі. (Першою дією визначимо швидкість катера за течією річки. Другою дією — час руху катера за течією річки. Третьою дією — швидкість катера проти течії річки. Четвертою дією — час руху катера проти течії річки. П'ятою дією — загальний час руху катера туди і назад.)

— Запишіть розв'язання за діями з поясненням.

Розв'язання:

1) $15 + 3 = 18 \left(\frac{\text{км}}{\text{год}}\right)$ — швидкість катера за течією;

2) $180 : 18 = 10$ (год) — час руху катера за течією;

3) $15 - 3 = 12 \left(\frac{\text{км}}{\text{год}}\right)$ — швидкість руху катера проти течії;

4) $180 : 12 = 15$ (год) — час руху катера проти течії річки;

5) $10 + 15 = 25$ (год) — загальний час руху катера за та проти течії.

Відповідь: 25 год потрібно катеру, щоб подолати відстань туди і назад.

Спосіб розв'язання задач цього виду полягає в знанні відповідних формул та вмінні перетворювати їх. Наприклад, треба знайти швидкість течії, якщо дано швидкість за течією або проти течії та власну швидкість.

У формулі

$$V_{\text{за течією}} = V_{\text{власна}} + V_{\text{течії}}$$

$V_{\text{за течією}}$ — сума

$V_{\text{власна}}$ — I доданок

$V_{\text{течії}}$ — II доданок

Щоб знайти II доданок, треба від суми відняти I доданок. Отже маємо:

$$V_{\text{течії}} = V_{\text{за течією}} - V_{\text{власна}}$$

Задача. По озеру човен пройшов за 20 хв 8 км, а коли ввійшов у річку, то за 2 год пройшов 42 км. Знайдіть швидкість течії річки (мотор працював увесь час однаково.)

Розв'язання:

1) 8 км = 8000 м; 42 км = 42 000 м; 2 год = 120 хв;

2) $8000 : 20 = 200 \left(\frac{\text{м}}{\text{хв}}\right)$ — швидкість човна по озеру, власна швидкість човна;

3) $42 000 : 120 = 350 \left(\frac{\text{м}}{\text{хв}}\right)$ — швидкість човна за течією річки;

4) $350 - 200 = 150 \left(\frac{\text{м}}{\text{хв}}\right)$ — швидкість течії річки.

Відповідь: $150 \frac{\text{м}}{\text{хв}}$ швидкість течії річки.

Якщо в задачі дано або можливо визначити власну швидкість катера та швидкість проти течії, то можна скористатися формулою:

$$V_{\text{проти течії}} = V_{\text{власна}} - V_{\text{течії}}$$

$V_{\text{проти течії}}$ — різниця

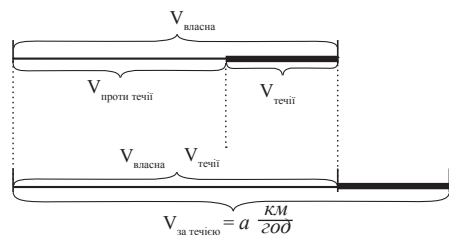
$V_{\text{власна}}$ — зменшувальне

$V_{\text{течії}}$ — від'ємник

Швидкість течії — це від'ємник. Щоб знайти невідомий від'ємник, треба від зменшуваного відняти різницю. Отже, маємо:

$$V_{\text{течії}} = V_{\text{власна}} - V_{\text{проти течії}}$$

Складнішою є задача на знаходження швидкості течії за відомими швидкістю за течією річки та швидкістю проти течії річки.



З малюнка бачимо, що швидкість човна за течією більша від швидкості човна проти течії на подвійну швидкість течії.

Тому маємо формулу:

$$V_{\text{течії}} = (V_{\text{за течією}} - V_{\text{проти течії}}) : 2$$

Отже, запропоновано методику навчання молодших школярів розв'язування задач на спільну роботу та на рух. Основною ідеєю поєднання цих типів задач у один блок є можливість порівняння математичних структур та способів розв'язання задач на спільну роботу та на рух.

Навчальне видання

Бібліотека «Шкільного світу»

Музично-дидактичні ігри в школі

Упорядник: *Васильченко Ірина Валеріївна*

*На обкладинці використано
фрагмент картини Артура Х'юза*

Формат 60×84/16.

Умовн. друк. арк. 6,98. Тираж 1000 пр.

Зам.

ТОВ «Редакції газет з дошкільної та початкової освіти»
01014, Київ, вул. Тимірязєвська, 2

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів
видавничої продукції серія ДК № 779 від 21.01.2002

Видруковано з готових діапозитивів в ОП «Житомироблдрукарня»
10014, Житомир, вул. Мала Бердичівська, 17

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів
видавничої продукції серія ЖТ № 1 від 06.04.2001